الرياضيات

الأستاذ

محمد حميد



0770 710 5007



t.me/mohhmath

2021

الثالث المتوسط

الجزء الأول

1 العلاقات والمتباينات

2 المقادير الجبرية

3 المعادلات

الأستاذ محمد حميد

الفصل الأول

العلاقات والمتباينات



الإهداء

الى سيدي ومولاي الامام الحجة ابن الحسن (عجل اللّه فرجه الشريف) أهدي هذا العمل المتواضع ... سائلاً اللّه (عز وجل) أن يتقبله مني لمقامه الشريف ويجعلني من الناصرين له والطالبين بدم الامام الحسين (ع) معه وتحت لوائه

الفصل الأول

العلاقات والمتباينات في الاعداد الحقيقية

ترتيب العمليات على الاعداد الحقيقية :

فكرة الدرس :

- تبسيط الجمل العددية التي تحتوي على اعداد حقيقية باستعمال ترتيب العمليات .

المفردات :

- العدد الحقيقي
- تنسيب (تجذير) المقام
- المرافق

تعرفنا مسبقا أن $(N \subset W \subset Z \subset Q \subset R)$.



مثال : يعد زلزال تسونامي الذي حدث في اليابان عام 2011 من أقوى الزلازل التي حدثت على مر العصور ، وتحسب سرعة التسونامي بالقانون $v = \sqrt{9.6\,d}$ متر بالثانية حيث d تمثل عمق المياه ، ما سرعة التسونامي التقريبية اذا كان عمق المياه 1000 متر ؟

الحل : قانون حساب سرعة التسونامي حيث d تمثل عمق المياه .

$$v = \sqrt{9.6\,d}$$

$$v = \sqrt{9.6 \times 1000} = \sqrt{9600} \approx 98\ m/sec$$ سرعة التسونامي التقريبية

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

استعمال ترتيب العمليات لتبسيط جمل عددية :

ملاحظة : اذا كان المقدار بالصورة $(a-b)(a+b)$ يتم التبسيط بطريقتين :

١) توزيع القوس الأول على القوس الثاني ومن ثم طرح الحدود المتشابهة .

٢) القوسان يمثلان تحليل فرق بين مربعين يمكن حلها بالطريقة $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

ملاحظة : تخص الجذور التربيعية والتكعيبية

1) $\sqrt{a}\,.\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{a}\,.\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$

2) $\sqrt{a}\,.\sqrt{a} = a$, $\sqrt[3]{a}\,.\sqrt[3]{a}\,.\sqrt[3]{a} = a$

3) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad b > 0$, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad b \neq 0$

4) $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

مثال : $\sqrt[3]{64} = 4 \ , \ \sqrt[3]{27} = 3 \ , \ \sqrt[3]{125} = 5$

مثال : بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الاعداد الحقيقية :

1) $(\sqrt{12}-\sqrt{18})(\sqrt{12}+\sqrt{18})$

نعتمد الطريقة $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ فيكون الحل كالاتي :

$$(\sqrt{12})^2-(\sqrt{18})^2=12-18=-6$$

2) $\left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\div\left(\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{27}}\right)=\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\div\left(\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\times\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

$$=\frac{-(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=-1$$

مثال : بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الاعداد الحقيقية وأكتب الناتج لأقرب عُشر :

1) $\sqrt{12}(\sqrt{3}-\sqrt{8})-6=\sqrt{12\times3}-\sqrt{12\times8}-6=\sqrt{36}-\sqrt{96}-6$

$$=6-4\sqrt{6}-6=-4\sqrt{6}=-4\times2.4=-9.6$$

2	2	96
	2	48
2	2	24
	2	12
	2	6
	3	3
		1

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

2) $(-27)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9}\sqrt{7}-\frac{1}{9}\sqrt{28}\right)=\sqrt[3]{-27}\left(\frac{1}{9}\sqrt{7}-\frac{1}{9}\sqrt{28}\right)$

$$=-3\left(\frac{1}{9}\sqrt{7}-\frac{2}{9}\sqrt{7}\right)=-3\left(-\frac{1}{9}\sqrt{7}\right)=\frac{3}{9}\sqrt{7}=\frac{1}{3}\sqrt{7}$$

$$=\frac{1}{3}\times2.6=\frac{2.6}{3}=0.86\approx0.9$$

2	2	28
	2	14
	7	7
		1

تنسيب المقام (المرافق)

ملاحظة : اذا كان المقام يحتوي على جذر فيجب التخلص منه هنالك حالتان :

١) اذا كان المقام يتكون نقوم بالضرب والقسمة على نفس الجذر اي أن :

$$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

٢) اذا كان المقام يتكون من حدين نقوم بالضرب والقسمة على نفس المقام بعكس الاشارة اي ان :

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

مثال : بسط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الاعداد الحقيقية :

1) $\frac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}-\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}-5}{5}$

2) $\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}}\times\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}(2\sqrt{3}+\sqrt{7})}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2}=\frac{2\sqrt{21\times3}+\sqrt{21\times7}}{12-7}=\frac{2\sqrt{63}+\sqrt{147}}{5}=\frac{6\sqrt{7}+7\sqrt{3}}{5}$

	63
3	21
3	7
7	1

$63 = 3\cdot3\cdot7$, $\sqrt{63}=3\sqrt{7}$

	147
3	49
7	7
7	1

$147 = 3\cdot7\cdot7$, $\sqrt{147}=7\sqrt{3}$

استعمال الحاسبة والتقريب لتبسيط جمل عددية

خواص الاسس :

1) $a^n\,.\,a^m=a^{n+m}$ 2) $(a^n)^m=a^{n\times m}$ 3) $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

4) $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ 5) $(a\,.\,b)^n=a^n\,.\,b^n$ 6) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ 7) $a^0=1$

مثال : احسب الاسس لكل مما يلي وأكتب الناتج مقربا الى مرتبتين عشريتين اذا لم يكن عددا صحيحا :

1) $9^{\frac{-3}{2}}=(3^2)^{\frac{-3}{2}}=3^{-3}=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}=0.037\approx0.04$

2) $(\sqrt{7})^2=7$

3) $2^{\frac{5}{3}}\times2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{-3}{2}}=2^{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}}=2^{\frac{6}{3}-\frac{3}{2}}=2^{\frac{12-9}{6}}=2^{\frac{3}{6}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}=1.414\approx1.41$

4) $5^2\div5^{\frac{3}{2}}=5^{2-\frac{3}{2}}=5^{\frac{4-3}{2}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}=2.236\approx2.24$

5) $\left(\frac{1}{2}\right)^2+3^{-2}-2^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\sqrt{2^3}$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\sqrt{8}\approx0.25+0.11-2.83=0.36-2.83=-2.47$

6) $8^{\frac{1}{3}}-(-8)^0+3^2\times3^{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{8}-1+3^{2+\frac{1}{2}}=2-1+3^{\frac{4+1}{2}}=1+3^{\frac{5}{2}}$

$=1+\sqrt{3^5}=1+\sqrt{243}\approx1+15.588=16.588=16.59$

مثال : بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الاعداد الحقيقية وأكتب الناتج لأقرب عشر :

$(-8)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{18}\right)=(-2^3)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{3}\times3\sqrt{2}\right)=-2\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)$

$$= -2 \times \frac{1}{4}\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \frac{-1}{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{2} \times 1.41 = \frac{4.23}{2} \approx 2.11 = 2.1$$

مثال : استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقربا لأقرب مرتبتين عشريتين :

1) $7.6 \times 10^{-4} - 0.4135 \times 10^{-3}$

$= 7.6 \times 10^{-4} - 4.135 \times 10^{-4} = (7.6 - 4.135) \times 10^{-4}$

$= 3.465 \times 10^{-4} \approx 3.47 \times 10^{-4}$

توضيح :

$$0.4135 = \frac{4135}{10000} = \frac{4135}{1000 \times 10} = \frac{4135}{1000} \times 10^{-1} = 4.135 \times 10^{-1}$$

$4.135 \times 10^{-1} \times 10^{-3} = 4.135 \times 10^{-4}$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

2) $0.052 \times 10^{4} + 7.13 \times 10^{2}$

$= 5.2 \times 10^{2} + 7.13 \times 10^{2} = (5.2 + 7.13) \times 10^{2} = 12.33 \times 10^{2}$
$= 1.23 \times 10^{3}$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

3) $(7.83 \times 10^{-5})^2 = (7.83 \times 10^{-5})(7.83 \times 10^{-5})$

$= 61.3089 \times 10^{-10} \approx 61.31 \times 10^{-10} = 6.13 \times 10^{-9}$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

4) $4.86 \times 10^{2} \div 0.55 \times 10^{5}$

$= (4.86 \div 0.55) \times 10^{2} \times 10^{-5} = 8.836 \times 10^{-3} \approx 8.84 \times 10^{-3}$

مثال : استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقربا لأقرب مرتبتين عشريتين :

$0.016 \times 10^{4} + 1.95 \times 10^{3}$

$= 0.16 \times 10^{3} + 1.95 \times 10^{3} = (0.016 + 1.95) \times 10^{3} = 2.11 \times 10^{3}$

تأكد من فهمك : بسط الجمل العددية الاتية

(1) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$

(2) $(\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2})$ عملية توزيع قوس على قوس آخر

$$\sqrt{7}\times\sqrt{7}-\sqrt{7}\times\sqrt{2}-\sqrt{2}\times\sqrt{7}+\sqrt{2}\times\sqrt{2}=7-\sqrt{14}-\sqrt{14}+2=9-2\sqrt{14}$$

طريقة ثانية : طريقة قانون المربع الكامل $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$$\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{7}\right)^2-2\times\sqrt{7}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=7-2\sqrt{14}+2=9-2\sqrt{14}$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

$$(3)\ \left(\sqrt{125}-\sqrt{20}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right)=\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=3\sqrt{5}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{6}{3}\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

	20
5	20
2	4
2	2
	1

$20 = 2\times 2\times 5$ (2 [2, 2)

	125
5	125
5	25
5	5
	1

$125 = 5\times5\times5$ (5 [5, 5)

$$(4)\ \frac{4\sqrt{12}}{5\sqrt[3]{-27}}\div\frac{2\sqrt{24}}{\sqrt{8}}=\frac{2\times 2\sqrt{3}}{5\times(-3)}\div\frac{2\times 2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{-15}\div\frac{4\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{-15}\div\frac{4\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{-15}\times\frac{2}{4\sqrt{3}}=\frac{-2}{15}$$

	24
2	24
2	12
2	6
3	3
	1

(2 [2, 2)

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

بسط الجمل العددية التالية وأكتب الناتج لأقرب عشر :

$$(5)\ \sqrt{7}\left(\sqrt{28}-\sqrt{2}\right)-5=\sqrt{7}\left(2\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)-5=\sqrt{7}\times 2\sqrt{7}-\sqrt{7}\times\sqrt{2}-5$$

$$=14-\sqrt{14}-5=9-\sqrt{14}=9-3.74=5.26\approx 5.3$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

$$(6)\ (-125)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{10}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sqrt{12}\right)=\sqrt[3]{-125}\left(\frac{1}{10}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\times 2\sqrt{3}\right)=-5\left(\frac{1}{10}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$=-5\times\frac{1}{10}\sqrt{3}+5\times\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{-1}{2}\sqrt{3}+\frac{5}{2}\sqrt{3}=\frac{4}{2}\sqrt{3}=2\sqrt{3}=2\times 1.73=3.46=3.5$$

بسط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الاعداد :

$$(7)\ \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\times 1-\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}-3}{12}$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

$$(8)\ \frac{1-\sqrt{20}}{\sqrt{5}}=\frac{1-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\left(1-2\sqrt{5}\right)}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\times 1-\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}-10}{5}$$

$(9)\ \frac{\sqrt{50}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}-\frac{10-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\frac{10-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$

$=\frac{\sqrt{3}(5\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{6}(10-\sqrt{6})}{\sqrt{6}\times2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}\times5\sqrt{2}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{6}\times10-\sqrt{6}\times\sqrt{6}}{12}=\frac{5\sqrt{6}-3}{6}-\frac{10\sqrt{6}-6}{12}$

$=\frac{10\sqrt{6}-6-10\sqrt{6}+6}{12}=\frac{0}{12}=0$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

استعمل ترتيب العمليات واكتب الناتج مقربا الى مرتبتين عشريتين مستعملا الحاسبة لكل مما يأتي :

$(10)\ (\frac{1}{3})^2+3^{-3}-3^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}-\sqrt{3^3}=\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\sqrt{27}=\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-3\sqrt{3}$

$=\frac{3+1-81\sqrt{3}}{27}=\frac{4-81\sqrt{3}}{27}=\frac{4-81\times(1.73)}{27}=\frac{4-140.13}{27}=\frac{-136.13}{27}=-5.042\approx-5.04$

$(11)\ (27)^{\frac{1}{2}}-(-9)^0+3^2\times(5)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{27}-1+9\times\sqrt{5}=3\sqrt{3}-1+9\times2.236$

$=3\times1.73-1+20.124=5.19-1+20.124=24.314\approx24.31$

استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقربا لأقرب مرتبتين عشريتين :

$(12)\ 6.43\times10^{-5}-0.25\times10^{-4}=0.643\times10^{-4}-0.25\times10^{-4}$

$=(0.643-0.25)\times10^{-4}=0.393\times10^{-4}$

$(13)\ (9.23\times10^{-3})^2=9.23\times10^{-3}\times9.23\times10^{-3}=85.1929\times10^{-6}$

$=8.52\times10^{-5}$

تدرب وحل تمرينات : بسط الجمل العددية الاتية

$(14)\ (\sqrt{18}-\sqrt{50})\left(\frac{-27}{64}\right)^{\frac{1}{3}}=(3\sqrt{2}-5\sqrt{2})\sqrt[3]{\frac{-27}{64}}=(-2\sqrt{2})\times\left(\frac{-3}{4}\right)=\frac{6\sqrt{2}}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$(15)\ \frac{\sqrt{12}}{3\sqrt[3]{125}}\div\frac{5\sqrt[3]{8}}{\sqrt{25}}=\frac{2\sqrt{3}}{3\times5}\div\frac{5\times2}{5}=\frac{2\sqrt{3}}{15}\div\frac{10}{5}=\frac{2\sqrt{3}}{15}\times\frac{5}{10}=\frac{\sqrt{3}}{15}$

$(16)\ 7\sqrt{\frac{2}{49}}-3\sqrt{\frac{8}{81}}+\sqrt{\frac{18}{36}}=7\times\frac{\sqrt{2}}{7}-3\times\frac{\sqrt{8}}{9}+\frac{\sqrt{18}}{6}=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{3\sqrt{2}}{6}$

$=\frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{6}=\frac{5\sqrt{2}}{6}=\frac{5\times1.41}{6}=\frac{7.05}{6}=1.17\approx1.2$

بسط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الاعداد :

$$(17)\ \frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}+3\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}+3\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{7}-3\sqrt{5})(\sqrt{7}-3\sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2-(3\sqrt{5})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{7}\times\sqrt{7}-\sqrt{7}\times3\sqrt{5}-3\sqrt{5}\times\sqrt{7}+3\sqrt{5}\times3\sqrt{5}}{7-45}=\frac{7-3\sqrt{35}-3\sqrt{35}+45}{-38}=\frac{52-6\sqrt{35}}{-38}=\frac{-52+6\sqrt{35}}{38}$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

$$(18)\ \frac{\sqrt{33}-\sqrt{11}}{\sqrt{99}}-\frac{\sqrt{60}-\sqrt{5}}{5\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{33}-\sqrt{11}}{3\sqrt{11}}-\frac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{5\sqrt{15}}$$

$$=\frac{\sqrt{33}-\sqrt{11}}{3\sqrt{11}}\times\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}-\frac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{5\sqrt{15}}\times\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{33}\times\sqrt{11}-\sqrt{11}\times\sqrt{11}}{3\sqrt{11}\times\sqrt{11}}-\frac{2\sqrt{15}\times\sqrt{15}-\sqrt{5}\times\sqrt{15}}{5\sqrt{15}\times\sqrt{15}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{11}\times\sqrt{11}-11}{3\times11}-\frac{30-\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{5\times15}=\frac{11\sqrt{3}-11}{33}-\frac{30-5\sqrt{3}}{75}=\frac{11(\sqrt{3}-1)}{33}-\frac{5(6-\sqrt{3})}{75}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)}{3}-\frac{(6-\sqrt{3})}{15}=\frac{5(\sqrt{3}-1)-(6-\sqrt{3})}{15}=\frac{5\sqrt{3}-5-6+\sqrt{3}}{15}=\frac{6\sqrt{3}-11}{15}$$

تدرب وحل مسائل حياتية



س 19 / الاقمار الصناعية : يستعمل القمر الصناعي بصفة اساسية في الاتصالات مثل اشارات التلفاز والمكالمات الهاتفية في جميع أنحاء العالم والتنبؤ بالطقس وتعقب الاعاصير اذ تدور هذه الاقمار بسرعات محددة في مدارات خاصة بها حول الارض وتحسب سرعة القمر المدارية بالعلاقة التالية : $V=\sqrt{\frac{4\times10^{14}}{r}}\ m/sec$ اذ r نصف قطرالمدار (بعدالقمر عن مركز الارض) ، ما سرعة القمر اذا كان نصف قطر المدار $300\ km$ ؟

الحل :

$$r=300\ km=300\times1000=3\times10^5\ m$$

$$V=\sqrt{\frac{4\times10^{14}}{r}}=\sqrt{\frac{4\times10^{14}}{3\times10^5}}=\sqrt{\frac{4\times10^{14-5}}{3}}=\frac{2\times\sqrt{10^9}}{\sqrt{3}}=\frac{2\times\sqrt{10}\times\sqrt{10^8}}{\sqrt{3}}$$

$$V=\frac{2\sqrt{10}\times10^4}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{30}\times10^4}{3}=\frac{2\times5.47\times10^4}{3}=\frac{10.94\times10^4}{3}=3.65\times10^4$$



س20 / مكافحة الحرائق : تحسب سرعة تدفق الماء الذي يضخ من سيارات الحريق بالقانون : $V = \sqrt{2\,hg}\ foot/sec$ اذ h تمثل اقصى ارتفاع للماء و g يمثل سرعة التعجيل الارضي $(32\,\frac{foot}{sec^2})$ لإطفاء الحريق في الغابات تحتاج إدارة مكافحة الحرائق في الدفاع المدني الى مضخة لتضخ الماء الى ارتفاع $80\ foot$ فهل تفي بحاجتها مضخة تقذف الماء بسرعة $72\ foot/sec$؟

$1\ foot = 30\ cm$ وحدة قياس بالنظام الفرنسي

الحل :

السرعة $V = 72\,\frac{foot}{sec}$ اقصى ارتفاع $80\ foot$ التعجيل الارضي $g = 32\,\frac{foot}{sec^2}$

$V = \sqrt{2\,hg}$

$72 = \sqrt{2\,h \times 32}$

$72 = \sqrt{64\,h}$

$72 = 8\sqrt{h} \Rightarrow \frac{72}{8} = \sqrt{h} \Rightarrow \sqrt{h} = 9$ بتربيع الطرفين

$h = 81\ foot$

المضخة تفي بحاجتها لقذف الماء بسرعة $72\ foot/sec$



س 21/ هندسة : جد مساحة المثلث الذي يعلو واجهة البيت اذا كان ارتفاعه $\sqrt{18} - \sqrt{3}$ وطول قاعدته $3\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

الحل :

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع

$$A = \frac{1}{2}(3\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{18} - \sqrt{3}) = \frac{1}{2}(3\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

$$A = \frac{1}{2}\left[(3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2\right]$$

$$A = \frac{1}{2}(18 - 3) = \frac{1}{2}\,(15) = 7.5\ m^2$$

فكر

س 22 / تحدٍّ : اثبت صحة ما يأتي :

$$\left(7^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{1}{3}}\right)\left(7^{\frac{2}{3}} + 7^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}} + 5^{\frac{2}{3}}\right) = 2$$

الحل : طريقة التوزيع

الطرف الايسر = $\left(7^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{1}{3}}\right)\left(7^{\frac{2}{3}} + 7^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}} + 5^{\frac{2}{3}}\right)$

$$= 7^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{2}{3}} + 7^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}} + 7^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}}$$

$$= 7^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} + 7^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} + 7^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$$

$$= 7^{\frac{3}{3}} + 7^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} + 7^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{2}{3}} \times 7^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{3}{3}} = 7 - 5 = 2$$

س23 / أصحح الخطأ : كتب شاكر ناتج جمع العددين كالاتي :

$$8.4 \times 10^{-3} + 0.52 \times 10^{-2} = 1.36 \times 10^{-3}$$

حدد خطأ شاكر وصححه .

الحل :

$$8.4 \times 10^{-3} + 0.52 \times 10^{-2} = 8.4 \times 10^{-3} + 5.2 \times 10^{-3}$$

$$= (8.4 + 5.2) \times 10^{-3} = 13.6 \times 10^{-3}$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

س 24 / حس عددي : هل أن العدد $\sqrt{125}$ يقع بين العددين $10.28 , 11.8$ ؟

الحل :

$$\sqrt{125} = 5\sqrt{5} = 5 \times 2.23 = 11.15$$

نعم العدد $\sqrt{125}$ يقع بين العددين $10.28 , 11.8$

أكتب : ناتج الجمع بالتقريب لأقرب عشر $6^{\frac{3}{2}} + 5^{\frac{3}{2}}$

الحل :

$$6^{\frac{3}{2}} + 5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{6^3} + \sqrt{5^3} = \sqrt{216} + \sqrt{125} = 6\sqrt{6} + 5\sqrt{5} = 6 \times 2.44 + 5 \times 2.23$$

$$= 14.64 + 11.15 = 25.79 \approx 25.8$$

مراجعة الفصل

تدريب 1 : بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الاعداد الحقيقية وأكتب الناتج لأقرب عشر:

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}+\sqrt{5}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}\times\sqrt{5}+\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{5+\sqrt{10}+\sqrt{10}+2}{5-2} = \frac{7+2\sqrt{10}}{3} = \frac{7+2(3.16)}{3} = \frac{7+6.32}{3} = \frac{13.32}{3} = 4.44 \approx 4.4$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

تدريب 2 : استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقربا لأقرب مرتبتين عشريتين :

$$6.25 \times 10^3 \div 0.05 \times 10^6 = (6.25 \div 0.05) \times 10^3 \times 10^6 = 125 \times 10^9$$

$$= 0.125 \times 10^{12} \approx 0.13 \times 10^{12}$$

اختبار الفصل

بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الاعداد الحقيقية :

$$1)\ (\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5}) = \sqrt{3}\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times\sqrt{5}+\sqrt{5}\times\sqrt{3}+\sqrt{5}\times\sqrt{5}$$

$$= 3+\sqrt{15}+\sqrt{15}+5 = 8+2\sqrt{15}$$

$$2)\ \frac{\sqrt{7}-\sqrt{14}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{8}-5}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{14}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{8}-5}{3\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{7}\times\sqrt{3}-\sqrt{14}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{8}\times\sqrt{2}-5\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{21}-\sqrt{42}}{3} - \frac{\sqrt{16}-5\sqrt{2}}{3\times2}$$

$$= \frac{\sqrt{21}-\sqrt{42}}{3} - \frac{4-5\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{21}-2\sqrt{42}-4+5\sqrt{2}}{6}$$

استعمل ترتيب العمليات والحاسبة لتكتب كل مما يلي مقربا لأقرب عشر :

$$3)\ \left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{0} + (121)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} - 1 + \sqrt{121}\times\frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{5} - 1 + 11\times\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{5}{5} + \frac{11}{3} = \frac{-4}{5} + \frac{11}{3} = \frac{-12+55}{15} = \frac{43}{15} \approx 2.86 \approx 2.9$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

التطبيقات

فكرة الدرس : تعرف التطبيق وأنواعه وكيفية تمثيله بيانيا في المستوي الاحداثي وتعرف تركيب التطبيقات

المفردات :

❖ العلاقة ❖ الزوج المرتب ❖ الضرب الديكارتي ❖ التطبيق

❖ المجال والمجال المقابل والمدى ❖ تركيب التطبيقات

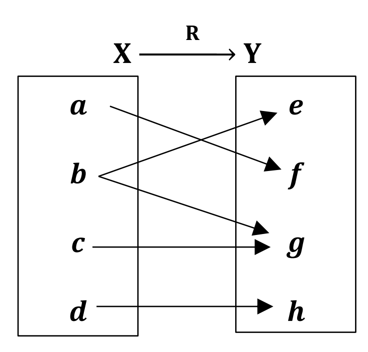
التطبيق وتمثيله في المستوي الاحداثي :

التطبيق : لتكن R علاقة من المجموعة X (المجال) الى المجموعة Y (المجال المقابل) حيث كل عنصر من عناصر X يرتبط بعنصر وحيد من عناصر Y عندئذ تسمى العلاقة R تطبيق وتكتب $R: X \to Y$.

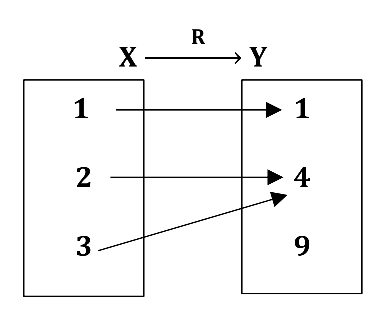
الزوج المرتب : هي مجموعة الازواج المرتبة $(x\,,y)$ اذ ينتمي المسقط الأول (الاحداثي الأول) الى المجموعة X والمسقط الثاني (الاحداثي الثاني) الى مجموعة Y من حاصل الضرب الديكارتي $X\times Y$.

المدى : يمثل المدى المسقط الثاني من الازواج المرتبة $(x\,,y)$ أي تمثل صور عناصر المجال (النواتج) .

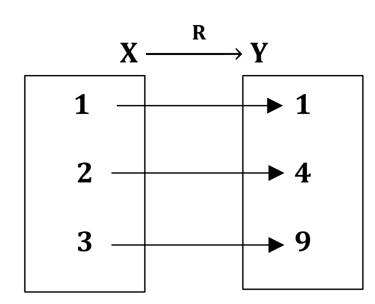
فيما يلي أمثلة توضح متى تكون العلاقة تطبيق :



R لا يمثل تطبيق لأن العنصر b في المجال ارتبط بعنصرين في المجال المقابل



R يمثل تطبيق لأن كل عنصر من X يرتبط بعنصر واحد من Y



R يمثل تطبيق لأن كل عنصر من X يرتبط بعنصر واحد من Y

مثال : اذا كانت $R: X \to Y$ تمثل تطبيقا بقاعدة اقتران $y = \frac{1}{2}x$ من المجموعة $X = \{4, 6, 8\}$ الى المجموعة $Y = \{2, 3, 4, 5\}$. أكتب التطبيق على شكل أزواج مرتبة ثم مثل التطبيق بمخطط سهمي وحدد المجال والمدى للتطبيق .

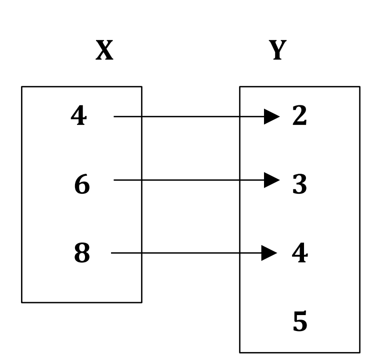
الحل :

$y = \frac{1}{2}x \quad , \quad x = \{4, 6, 8\}$

$y = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

$y = \frac{1}{2} \times 6 = 3$

$y = \frac{1}{2} \times 8 = 4$



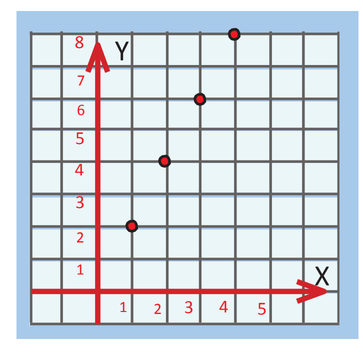
$R = \{(4, 2), (6, 3), (8, 4)\}$ الأزواج المرتبة

المجال : هي مجموعة الاحداثيات الأولى من الأزواج المرتبة في R . أي أن عناصر المجال $x = \{4, 6, 8\}$

المدى $= \{2, 3, 4\}$

مثال : الجدول التالي يمثل العلاقة بين الوزن (كغم) وسعر السمك هل تمثل العلاقة تطبيقا ؟ اذا كانت تطبيقا فاكتب قاعدة الاقتران وحدد المجال والمدى .

السعر بألوف الدنانير Y	الوزن / كغم X
2	1
4	2
6	3
8	4



الحل :

قاعدة الاقتران $y = 2x$

المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$

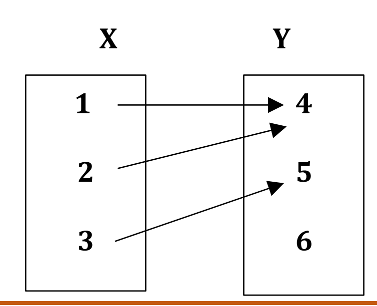
المدى $= \{2, 4, 6, 8\}$

مثال : اذا كانت العلاقة $R: X \to Y$ معطاة كما يلي : $R = \{(1, 4), (2, 4), (3, 5)\}$ اذ $X = \{1, 2, 3\}$



و $Y = \{4 , 5 , 6\}$ مثل العلاقة بمخطط سهمي وحدد المجال والمدى للعلاقة .

الحل : المخطط السهمي



المجال $= \{1 , 2 , 3\}$

المدى $= \{4 , 5\}$

أنواع التطبيق

1) التطبيق شامل

يكون التطبيق $f : X \to Y$ شامل اذا كان المدى = المجال المقابل

ملاحظة : يكون التطبيق $f : X \to Y$ غير شامل اذا كان المجال المقابل Z , R , Q , N

2) التطبيق المتباين

يكون التطبيق $f : X \to Y$ متباين اذا كان كل عنصر في Y يرتبط بعنصر واحد من X أي أن :

$$\forall x_1 , x_2 \in X \quad , \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

ملاحظة : يكون التطبيق $f : X \to Y$ غير متباين اذا كان :

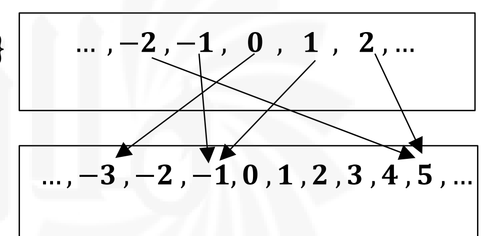
$$\forall x_1 , x_2 \in X \quad , \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$$

3) التطبيق التقابل

يكون التطبيق $f : X \to Y$ تقابل اذا كان التطبيق شامل ومتباين في آن واحد .

مثال : اذا كانت $f : Z \to Z$ حيث : $f(x) = 2x^2 - 3$ بين نوع التطبيق حيث Z مجموعة الاعداد الصحيحة .

الحل :



$f(x) = 2x^2 - 3 \quad , \quad x = z = \{0 , 1 , 2 , -1 , -2 , \dots\}$

$f(0) = 2(0)^2 - 3 = 0 - 3 = -3$

$f(1) = 2(1)^2 - 3 = 2 - 3 = -1$

$f(-1) = 2(-1)^2 - 3 = 2 - 3 = -1$

$f(2) = 2(2)^2 - 3 = 8 - 3 = 5$

$f(-2) = 2(-2)^2 - 3 = 8 - 3 = 5$

المدى $= \{-3 , -1 , 5 , \dots\}$

التطبيق ليس شامل لأن المدى $\neq$ المجال المقابل Z ، التطبيق ليس متباينا لأن $f(-1) = f(1) = -1$ بينما $1 \neq -1$

تركيب التطبيقات

لإيجاد دالة جديدة من دالتين معلومتين هما $f(x), g(x)$ وهي :

1) $(fog)(x) = f[g(x)]$

وتقرأ تركيب g (f بعد g) وهي ناتج ايجاد $g(x)$ أولا ثم ايجاد صورتها في الدالة f .

2) $(gof)(x) = g[f(x)]$

وتقرأ تركيب f (g بعد f) وهي ناتج ايجاد $f(x)$ أولا ثم ايجاد صورتها في الدالة g .

مثال : اذا كان $f(x) = 2x + 1$ ، $f : N \to N$ ، $g(x) = x^2$ ، $g : N \to N$

جد : $(fog)(3)$ (i ، $(gof)(3)$ (ii ، ماذا تلاحظ ، (iii جد قيمة x اذا كان $fog(x) = 33$

الحل :

$i)\ (fog)(3)$

$$f(x) = 2x + 1$$
$$g(x) = \overbrace{x^2}^{\uparrow}$$

$(fog)(x) = 2x^2 + 1$

$(fog)(3) = 2(3)^2 + 1 = 18 + 1 = 19$

$ii)\ (gof)(3)$

$$g(x) = x^2$$
$$f(x) = \overbrace{2x + 1}^{\uparrow}$$

$(gof)(x) = (2x + 1)^2$

$(gof)(3) = [2(3) + 1]^2 = (7)^2 = 49$

$$(fog)(3) \neq (gof)(3)$$

$iii)\ fog(x) = 33$

$$f(x) = 2x + 1$$
$$g(x) = \overbrace{x^2}^{\uparrow}$$

$2x^2 + 1 = 33$

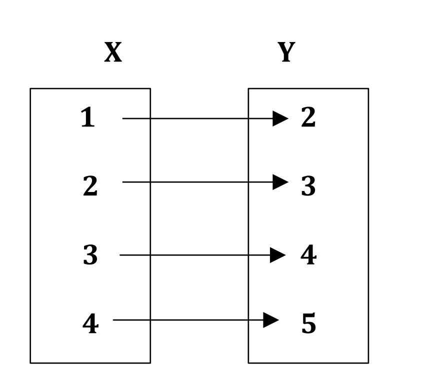
$2x^2 = 33 - 1 \Rightarrow [2x^2 = 32] \div 2 \Rightarrow x^2 = 16 \ \Rightarrow x = 4$

تأكد من فهمك :

اكتب قاعدة اقتران عامة للتطبيق ومثله بمخطط سهمي واكتب المجال والمدى لها :

1) $f = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$

الحل :



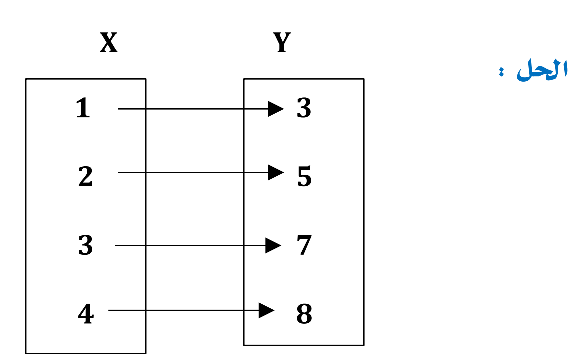
$f(x) = x + 1$ قاعدة الاقتران

$\{1,2,3,4\} =$ المجال

$\{2,3,4,5\} =$ المدى

2) $g = \{(1,3),(2,5),(3,7),(4,9)\}$

الحل :



$f(x) = 2x + 1$ قاعدة الاقتران

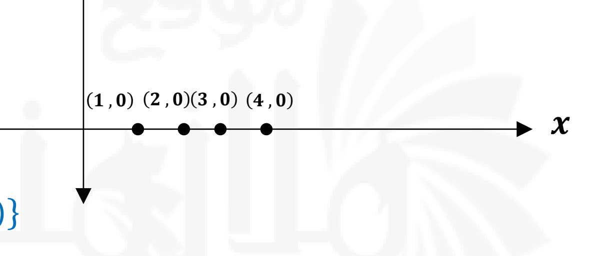
$\{1,2,3,4\} =$ المجال

$\{3,5,7,9\} =$ المدى

أكتب قاعدة الاقتران للتطبيقات التالية ومثلها في المستوي الاحداثي وأكتب المجال والمدى لها :

3) $f = \{(1,0),(2,0),(3,0),(4,0)\}$

الحل :



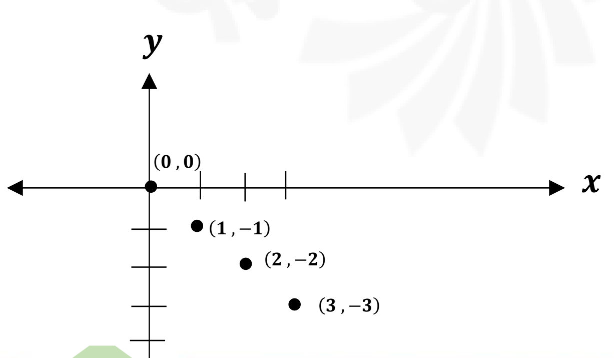
$f(x) = 0$ قاعدة الاقتران

$\{1,2,3,4\} =$ المجال

$\{0\} =$ المدى

4) $g = \{(0,0),(1,-1),(2,-2),(3,-3)\}$

الحل :



$f(x) = -x$ قاعدة الاقتران

$\{0,1,2,3\} =$ المجال

$\{0,-1,-2,-3\} =$ المدى

5) اذا كان التطبيق $f : N \to N$ اذ أن : $f(x) = 3x + 2$ بين هل أن التطبيق شامل أم لا ؟

الحل :

$f(x) = 3x + 2 \quad , \quad x = N = \{1 , 2 , 3 , \dots\}$

$f(1) = 3(1) + 2 = 5 \quad , \quad f(x) = 3(2) + 2 = 8 \quad , \quad f(x) = 3(3) + 2 = 11$

المدى = $\{5 , 8 , 11 , \dots\}$ ، التطبيق ليس شامل لأن المدى $\neq$ المجال المقابل N

6) ليكن التطبيقان $f : Z \to Z$ حيث $f(x) = 3x + 1$ وأن $g : A \to A$ حيث $g(x) = 2x + 5$ جد قيمة x اذا كان : $(fog)(x) = 28$

الحل :

$$f(x) = 3x + 1$$
$$g(x) = 2x + 5$$

$(fog)(x) = 28$

$3(2x + 5) + 1 = 28$

$6x + 15 + 1 = 28$

$6x + 16 = 28$

$6x = 28 - 16 \implies 6x = 12 \implies x = \frac{12}{6} = 2$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

7) اذا كانت $f : N \to N$ حيث $f(x) = 5x + 2$ وأن $g: N \to N$ حيث $g(x) = x + 3$ أكتب التطبيق fog بكتابة الازواج المرتبة لها وأكتب مداها وبين نوعها ؟

الحل : $x = N = \{1 , 2 , 3 , \dots\}$

$$f(x) = 5x + 2$$
$$g(x) = x + 3$$

$fog\,(x) = 5(x + 3) + 2 = 5x + 15 + 2 = 5x + 17$

$fog(1) = 5(1) + 17 = 22$

$fog(2) = 5(2) + 17 = 27$

$fog(3) = 5(3) + 17 = 32$

$fog = \{(1 , 22 , (2 , 27 , (3 , 32), \dots\}$ الازواج المرتبة

المدى = $\{22 , 27 , 32 , \dots\}$

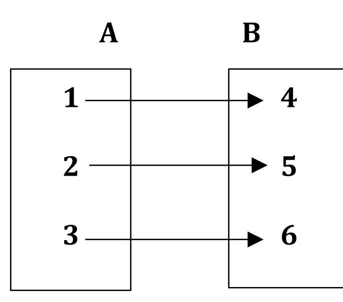
التطبيق ليس شامل لأن المدى $\neq$ المجال المقابل N

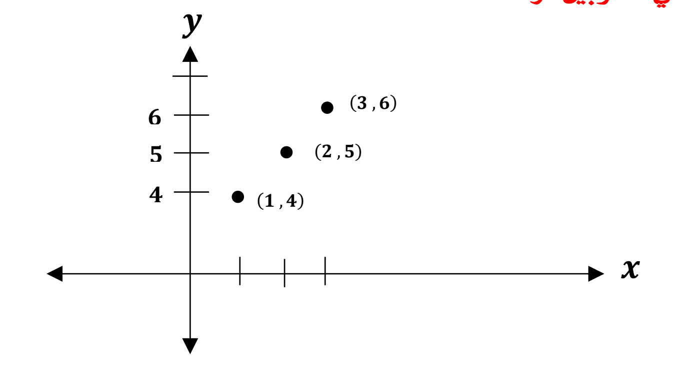
التطبيق متباين لأن $fog(1) \neq fog(2)$ بينما $2 \neq 1$ التطبيق ليس تقابل

تدرب وحل التمرينات

8) اذا كان $A = \{1 , 2 , 3\}$ و $B = \{4 , 5 , 6\}$ وأن $f : A \to B$ معرف كالاتي : $f = \{(1 , 4), (2 , 5), (3 , 6)\}$
ارسم المخطط السهمي للتطبيق وارسم المخطط البياني له وبين نوعه .

الحل :





المدى = $\{4 , 5 , 6\}$

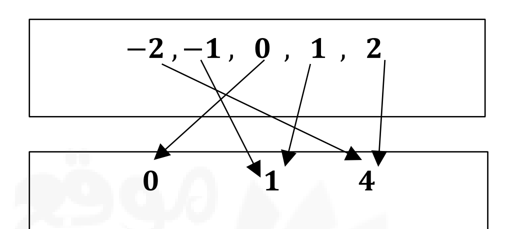
التطبيق شامل لأن المدى = المجال المقابل

التطبيق متباين لأن $f(1) \neq f(2)$ التطبيق تقابل

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

9) اذا كان $f : A \to Z$ حيث $f(x) = x^2$ والمجموعة $A = \{-2 , -1 , 0 , 1 , 2\}$ ارسم مخططا سهميا للتطبيق ومثله بيانيا في المستوي الاحداثي وبين هل أنه تطبيق متباين أم لا ؟

الحل :



$f(x) = x^2 \quad , \quad A = \{-2 , -1 , 0 , 1 , 2\}$

$f(-2) = (-2)^2 = 4$

$f(-1) = (-1)^2 = 1$

$f(0) = (0)^2 = 0$

$f(1) = (1)^2 = 1$

$f(2) = (2)^2 = 4$

$f = \{(-2 , 4), (-1 , 1) , (0 , 0) , (1 , 1), (2 , 4)\}$

التطبيق ليس متباين لأن $f(1) = f(-1)$ بينما $1 \neq -1$

10) ليكن $f : N \to N$ اذ أن $f(x) = x^2$ و $g : N \to N$ اذ أن $g(x) = x + 1$ والمطلوب إيجاد :

1) $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$ 2) $(fog)(2) , (gof)(2)$

الحل :

1) $(g \circ f)(x)$

$$g(x) = x + 1$$
$$f(x) = x^2$$

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 1$$

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = x + 1$$

$$(f \circ g)(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

2) $(fog)(2) = (x+1)^2 = (2+1)^2 = (3)^2 = 9$

$(gof)(2) = x^2 + 1 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

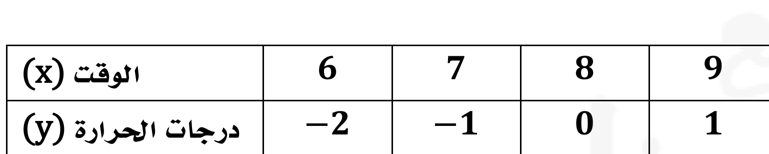
تدرب وحل مسائل حياتية



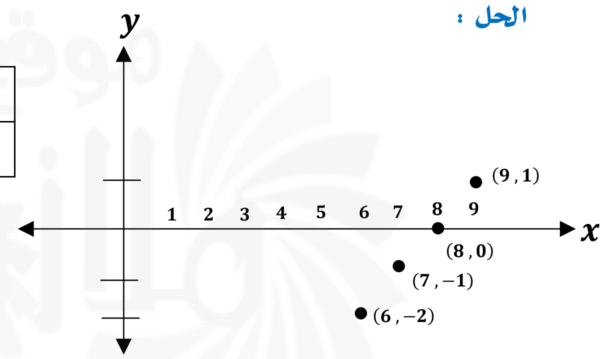
11) درجات الحرارة : سجلت درجات الحرارة في أحد أيام الشتاء بالعلاقة التالية :

$R = \{(6,-2),(7,-1),(8,0),(9,1)\}$ اذ يمثل الاحداثي الأول بالساعة والاحداثي الثاني درجة الحرارة بالدرجات السيليزية . مثل العلاقة بجدول ومثلها بالمستوي الاحداثي بيانيا هل تمثل العلاقة تطبيقا أم لا ؟

الحل :

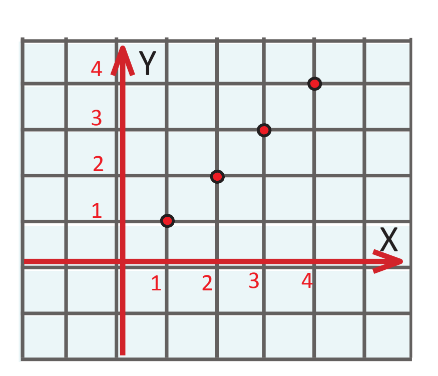


الوقت (x)	6	7	8	9
درجات الحرارة (y)	-2	-1	0	1



العلاقة تمثل تطبيقا لأن كل عنصر من عناصر X يرتبط بعنصر واحد من عناصر Y

12) المستوى الاحداثي : الشكل البياني المجاور يمثل تطبيق $f : N \longrightarrow N$ أكتب احداثيات الازواج المرتبة التي تمثلها نقاط التطبيق في الشكل البياني وأكتب قاعدة اقتران التطبيق وهل التطبيق متباين أم لا ؟



الحل :

الأزواج المرتبة $f = \{(1 , 1), (2 , 2), (3 , 3), (4 , 4)\}$

قاعدة الاقتران $f(x) = x$

التطبيق متباين لأن $f(1) \neq f(2)$ بينما $1 \neq 2$ (يحقق الشرط)

13) صحة : العلاقة $W_r = 2(\frac{W_b}{3})$ تمثل وزن الماء في جسم الانسان و W_b تمثل وزن الانسان . وزن حسان $150\ kg$ استعمل نظام خاص بأنقاص الوزن لمدة ثلاثة أشهر ففقد من كتلته $6\ kg$ في الشهر الأول ثم $12\ kg$ في الشهر الثاني ، $12\ kg$ في الشهر الثالث . أكتب جميع الأزواج المرتبة للعلاقة بين وزن حسان ووزن الماء في جسمه ، هل تمثل تطبيقا أم لا ؟

الحل : $W_r = 2\left(\frac{W_b}{3}\right)$

$$W_r = 2\left(\frac{150}{3}\right) = 2(50) = 100$$

في الشهر الأول وزن الماء في جسم حسان

$$W_1 = 2\left(\frac{144}{3}\right) = 2(48) = 96$$

في الشهر الثاني وزن الماء في جسم حسان

$$W_2 = 2\left(\frac{132}{3}\right) = 2\ (44) = 88\ kg$$

في الشهر الثالث وزن الماء في جسم حسان

$$W_3 = 2\left(\frac{120}{3}\right) = 2\ (40) = 80\ kg$$

وزن حسان في الشهر الأول $150 - 6 = 144\ kg$

وزن حسان في الشهر الثاني $144 - 12 = 132\ kg$

وزن حسان في الشهر الثالث $132 - 12 = 120\ kg$

$$f = \{(150 , 100) , (144 , 96), (132 , 88), (120 , 80), \ldots\}$$

المجال $=\{150 , 144 , 132 , 120\}$ المدى $=\{100 , 96 , 88 , 80\}$

تمثل تطبيقا لأن كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر المجال المقابل .

فكر

14) تحد : اذا كانت $f : A \to A$ وكان $A = \{1, 2, 3\}$ و $g : A \to A$ معرفان كما يلي :

$$f = \{(1,3), (3,3), (2,3)\} \quad , \quad g = \{(3,1), (1,2), (2,3)\}$$

بين هل $fog = gof$ ؟

الحل :

$fog(x) = f[g(x)]$

$fog(1) = f[g(1)] = f(2) = 3$

$fog(2) = f[g(2)] = f(1) = 3$

$fog(3) = f[g(3)] = f(1) = 3$

$fog = \{(1,3), (2,3), (3,3)\}$

$gof(x) = g[f(x)]$

$gof(1) = g[f(1)] = g(3) = 1$

$gof(2) = g[f(2)] = g(3) = 1$

$gof(3) = g[f(3)] = g(3) = 1$

$gof = \{(1,1), (2,1), (3,1)\} \quad , \quad fog \neq gof$

15) أصحح الخطأ : قال ياسين أن العلاقة $f : Z \to Z$ حيث $f(x) = x^3$ لا تمثل تطبيقا متباينا . حدد خطأ ياسين وصححه .

الحل :

$f(x) = x^3 \quad , \quad x = Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$f(-2) = (-2)^3 = -8$

$f(-1) = (-1)^3 = -1$

$f(0) = (0)^3 = 0$

$f(1) = (1)^3 = 1$

$f(2) = (2)^3 = 8$

التطبيق متباين لأن $f(-1) \neq f(1)$ بينما $-1 \neq 1$ (شرط التباين)

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

16) حس عددي : حدد ما اذا كانت كل علاقة فيما يلي تمثل تطبيقا أم لا ؟ فسر ذلك

x	1	2	3	4	5
y	3	5	7	9	11

الحل : ليس لها قاعدة اقتران اذن لا تمثل تطبيق .

اكتب : ليكن التطبيق $f : N \to Z$ حيث $f(x) = 4x - 3$ اذا كان $(fof)(x) = 1$ فجد قيمة x ؟

الحل :

$$f(x) = 4x - 3$$

$$f(x) = \overbrace{4x - 3}^{\uparrow}$$

$(fof)(x) = 1$

$4(4x - 3) - 3 = 1$

$16x - 12 - 3 = 1 \Rightarrow 16x - 15 = 1$

$16x = 1 + 15 \quad \Rightarrow 16x = 16 \Rightarrow \frac{16x}{16} = \frac{16}{16} \quad \Rightarrow x = 1$

مراجعة الفصل

تدريب : اذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ وكانت الدالتان : $f : A \longrightarrow A$ و $g : A \longrightarrow A$ معرفتين كما يأتي :

$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\} \quad , \quad g = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

جد تركيب الدالتين : $1)\ fog \qquad 2)\ gof$

$1)\ fog(x) = f[g(x)]$

$fog(1) = f[g(1)] = f(1) = 2$

$fog(2) = f[g(2)] = f(2) = 3$

$fog(3) = f[g(3)] = f(3) = 1$

$2)\ gof(x) = g[f(x)]$

$gof(1) = g[f(1)] = g(2) = 2$

$gof(2) = g[f(2)] = g(3) = 3$

$gof(3) = g[f(3)] = g(1) = 1$

اختبار الفصل

4) اذا كانت $f : z \longrightarrow R$ حيث $(x) = x^2$. ارسم مخططا سهميا للدالة وبين هل أن الدالة متباينة أو شاملة أو تقابل ؟

الحل :

$f(x) = x^2 \qquad , \quad x = Z = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

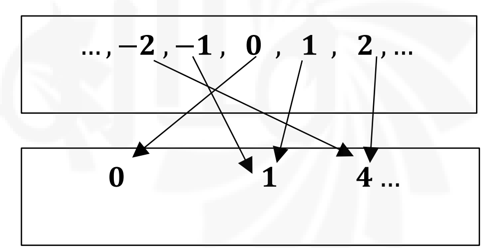
$f(-2) = (-2)^2 = 4$

$f(-1) = (-1)^2 = 1$

$f(0) = (0)^2 = 0$

$f(1) = (1)^2 = 1$

$f(2) = (2)^2 = 4$



المدى $= \{4, 1, 0\}$ التطبيق غير شامل لأن المدى $\neq$ المجال المقابل R

التطبيق ليس متباين لأن $f(1) = f(-1)$ بينما $1 = -1$ (النواتج متشابهة) ، التطبيق ليس تقابل

5) اذا كانت $f : N \to N$ اذ أن $f(x) = 3x + 1$ و $g : N \to N$ اذ أن $g(x) = x^2$

جد : $(fog)(2)$ ، $(gof)(2)$ ، $(fog)(5)$ ، $(gof)(5)$

الحل :

$$f(x) = 3x + 1$$
$$g(x) = \overbrace{x^2}$$

$(fog)(x) = 3x^2 + 1$

$(fog)(2) = 3(2)^2 + 1 = 3(4) + 1 = 12 + 1 = 13$

$(fog)(5) = 3(5)^2 + 1 = 3(25) + 1 = 75 + 1 = 76$

$$g(x) = x^2$$
$$f(x) = \overbrace{3x + 1}$$

$(gof)(x) = (3x + 1)^2$

$(gof)(2) = (3(2) + 1)^2 = (7)^2 = 49$

$(gof)(5) = (3(5) + 1) = (16)^2 = 256$

6) اذا كانت $f : R \to R$ حيث $f(x) = 3x + 1$ والدالة $g : R \to R$ حيث $g(x) = 2x + 5$ هل ان $gof(x) = fog(x)$ جد قيمة x اذا كانت $(fog)(x) = 28$

الحل :

$$g(x) = 2x + 5$$
$$f(x) = \overbrace{3x + 1}$$

$gof(x) = 2(3x + 1) + 5 = 6x + 2 + 5 = 6x + 7$

$$f(x) = 3x + 1$$
$$g(x) = \overbrace{2x + 5}$$

$fog(x) = 3(2x + 5) + 1 = 6x + 15 + 1 = 6x + 16$

$fog(x) \neq gof(x)$

$(fog)(x) = 28$

$3(2x + 5) + 1 = 28$

$6x + 15 + 1 = 28$

$6x + 16 = 28$

$6x = 28 - 16$

$6x = 12$

$\frac{6x}{6} = \frac{12}{6} \Longrightarrow x = 2$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

المتتابعات

فكرة الدرس :

- التعرف الى المتتابعة والمتتابعة الحسابية وخواصها

المفردات :

❖ المتتابعة ❖ المتتابعة الحسابية ❖ الحد العام

❖ المتتابعة الثابتة ❖ أساس المتتابعة

المتتابعة : هي دالة مجالها N أو مجموعة جزئية مرتبة منتهية من N أي أن : $f : N \to R$ وتكتب على شكل مجموعة من الازواج المرتبة حيث المساقط الأولى تمثل عناصر المجال N والمساقط الثانية تمثل عناصر المجال المقابل (الصور) كما في الشكل : $\{(1 , f(1)) , (2 , f(2)) , (3 , f(3)) , \ldots , (n , f(n)) , \ldots\}$ فاذا كانت المتتابعة منتهية يرمز لها بالرمز $\{u_n\}_n^m$ أو $\{f(n)\}_{n=1}^m$ أما اذا كانت المتتابعة غير منتهية يرمز لها بالرمز $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ أو $\{f(n)\}_{n=1}^\infty$.

ملاحظة : غالبا ما نكتفي عند كتابة المتتابعة بذكر المساقط الثانية فقط (الصور) .

$\{f(1), f(2), f\ (3), \ldots \ldots \ldots , f\ (n), \ldots\}$

ملاحظة : يسمى u_n بالحد العام للمتتابعة $u_n = f(n)$ وتكتب المتتابعة بالصورة :

$\{u_1 , u_2 , u_3 , \ldots \ldots \ldots , u_i, \ldots\}$

مثال : نظم جدولا يربط بين عدد الايام وعدد اللوحات . أكتب مجموعة الازواج المرتبة من الجدول . هل يمثل الجدول نمطا ؟ هل يمثل متتابعة ؟

عدد اللوحات	1	2	3	4	5
عدد الايام	3	6	9	12	15

الحل :

الازواج المرتبة $\{(1 , 3), (2 , 6), (3 , 9), (4 , 12), (5 , 15)\}$

نعم يمثل نمطا والعلاقة تمثل (ثلاثة امثال) والعلاقة تمثل متتابعة حدها العام هو $u_n = 3n ,\ \ n \in \{1 , 2 , 3, 4 , 5\}$

تكتب بالشكل الاتي :

$\{u_n\} = 3n = \{3 , 6 , 9 , 12 , 15\}$

مثال : أكتب الازواج المرتبة الخمسة الأولى للمتتابعة $\{u_n\}$ ومثلها على المستوي الاحداثي :

1) $\{u_n\} = n$

الحل :

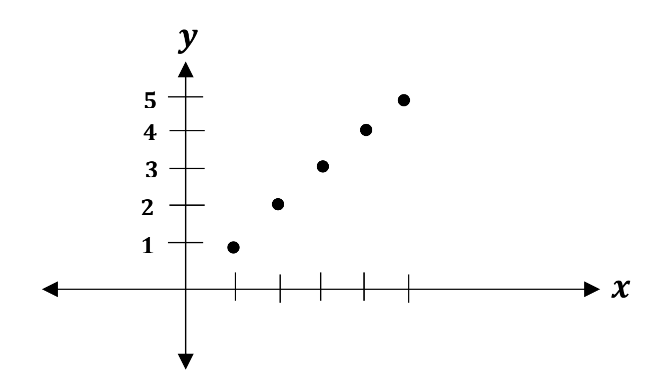
$u_1 = 1$

$u_2 = 2$

$u_3 = 3$

$u_4 = 4$

$u_5 = 5$



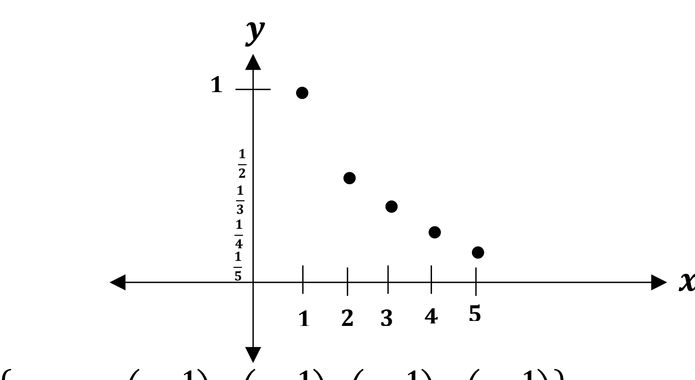
الأزواج المرتبة $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$

2) $\{u_n\} = \frac{1}{n}$

$u_1 = \frac{1}{1} = 1$

$u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{1}{3}$

$u_4 = \frac{1}{4}$, $u_5 = \frac{1}{5}$



الأزواج المرتبة $\{(1,1), \left(2,\frac{1}{2}\right), \left(3,\frac{1}{3}\right), \left(4,\frac{1}{4}\right), \left(5,\frac{1}{5}\right)\}$

مثال : أكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الاتية :

1) $\{u_n\} = 2n - 1$

الحل :

$u_1 = 2(1) - 1 = 1$, $u_2 = 2(2) - 1 = 3$

$u_3 = 2(3) - 1 = 5$, $u_4 = 2(4) - 1 = 7$, $u_5 = 2(5) - 1 = 9$

المتتابعة هي : $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$

2) $\{u_n\} = (-1)^n$

الحل :

$u_1 = (-1)^1 = -1$, $u_2 = (-1)^2 = 1$, $u_3 = (-1)^3 = -1$

$u_4 = (-1)^4 = 1$, $u_5 = (-1)^5 = -1$

المتتابعة هي : $\{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$

$3)\ \{u_n\} = \frac{n}{3}$

الحل :

$u_1 = \frac{1}{3}$, $u_2 = \frac{2}{3}$, $u_3 = \frac{3}{3} = 1$, $u_4 = \frac{4}{3}$, $u_5 = \frac{5}{3}$

المتتابعة هي : $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \dots\right\}$

$4)\ \{u_n\} = n^2$

الحل :

$u_1 = (1)^2 = 1$, $u_2 = (2)^2 = 4$, $u_3 = (3)^2 = 9$

$u_4 = (4)^2 = 16$, $u_5 = (5)^2 = 25$

المتتابعة هي : $\{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$

$5)\ \{u_n\} = n^3$

الحل :

$u_1 = (1)^3 = 1$, $u_2 = (2)^3 = 8$, $u_3 = (3)^3 = 27$

$u_4 = (4)^3 = 64$, $u_5 = (5)^3 = 125$

المتتابعة هي : $\{1, 8, 27, 64, 125, \dots\}$

المتتابعة الحسابية

المتتابعة الحسابية : هي المتتابعة التي يكون فيها الفرق بين كل حدين متتاليين عددا ثابتا ويسمى أساس المتتابعة ويرمز له بالرمز $d = u_{n+1} - u_n$ أي ان (الاساس = الحد الثاني − الحد الاول) ويمكن كتابة المتتابعة بمعرفة حدها الاول $a = u_1$ وأساسها d .

أنواع المتتابعات الحسابية

١) المتتابعة المتزايدة وفيها $d > 0$ (موجبة) . مثال : $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$

٢) المتتابعة المتناقصة وفيها $d < 0$ (سالبة) . مثال : $\{4, 2, 0, -2, -4, \dots\}$

٣) المتتابعة الثابتة وفيها $d = 0$ مثال : $\{5, 5, 5, 5, 5, \dots\}$

قانون الحد العام للمتتابعة الحسابية هو :

حيث n عدد حدود المتتابعة

$$u_n = a + (n-1)d \quad , \ n \in N$$

ملاحظة : لإيجاد المتتابعة الحسابية اذا علم حدها الأول وأساسها نستخدم :

$$u_1 \xrightarrow{+d} u_2 \xrightarrow{+d} u_3 \xrightarrow{+d} \dots\dots \xrightarrow{+d} u_n$$

مثال : أكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات الحسابية الاتية :

1) متتابعة حسابية حدها الاول (3) وأساسها (6) .

الحل :

$a = u_1 = 3 \quad , \quad d = 6$

$u_2 = u_1 + d = 3 + 6 = 9 \quad , \quad u_3 = u_2 + d = 9 + 6 = 15$

$u_4 = u_3 + d = 15 + 6 = 21 \quad , \quad u_5 = u_4 + d = 21 + 6 = 27$

المتتابعة الحسابية $\{3 , 9 , 15 , 21 , 27 , \dots\}$

2) متتابعة حسابية حدها الاول (1) وأساسها (-3) .

الحل :

$a = u_1 = 1 \quad , \quad d = -3$

$u_2 = u_1 + d = 1 - 3 = -2 \quad , \quad u_3 = u_2 + d = -2 - 3 = -5$

$u_4 = u_3 + d = -5 - 3 = -8 \quad , \quad u_5 = u_4 + d = -8 - 3 = -11$

المتتابعة الحسابية $\{1 , -2 , -5 , -8 , -11 , \dots\}$

3) متتابعة حسابية حدها السابع (36) وأساسها (4) .

الحل :

$u_7 = 1 \quad , \quad n = 7 \quad , \quad d = 4 \quad , \quad a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$u_7 = a + (7-1)(4)$

$36 = a + (7-1)(4) \Rightarrow 36 = a + 6(4) \Rightarrow 36 = a + 24 \Rightarrow a = 36 - 24 \Rightarrow a = 12$

المتتابعة الحسابية $\{12 , 16 , 20 , 24 , 28, \dots\}$

مثال : متتابعة حسابية حدها الثالث (8) و $d = -3$ جد الحدود بين u_7 , u_{11}

الحل :

$u_3 = 8 \quad , \quad n = 3 \quad , \quad d = -3 \quad , \quad a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$u_3 = a + (3-1)(-3)$

$8 = a - 6 \Rightarrow a = 8 + 6 \Rightarrow a = 14$

$u_8 = 14 + (8-1)(-3) = 14 + (7)(-3) = 14 - 21 = -7$

$u_9 = 14 + (9-1)(-3) = 14 - 24 = -10$

$u_{10} = 14 + (10-1)(-3) = 14 - 27 = -13$

المتتابعة الحسابية $\{\dots , -7 , -10 , -13 , \dots\}$

مثال : جد الحد العشرين من المتتابعة الحسابية $\{6, 1, -4, -9, \ldots\}$ وحدد ما اذا كانت المتتابعة متناقصة ام متزايدة ؟

الحل :

$a = 6 \quad , \quad d = 1 - 6 = -5 \quad , \quad u_{20} = ? \quad n = 20$

$u_n = a + (n-1)d$

$u_{20} = 6 + (20-1)(-5) = 6 + (19)(-5) = 6 - 95 = -89$

المتتابعة متناقصة لأن : $d < 0$

تأكد من فهمك :

أكتب الازواج المرتبة الاربعة الأولى للمتتابعة التي حدها العام معطى :

1) $u_n = 3n$

الحل :

$u_1 = 3(1) = 3 \quad , \quad u_2 = 3(2) = 6 \quad , \quad u_3 = 3(3) = 9 \quad , \quad u_4 = 3(4) = 12$

الأزواج المرتبة : $\{(1,3), (2,6), (3,9), (4,12), \ldots\}$

2) $u_n = n - 4$

الحل :

$u_1 = 1 - 4 = -3 \quad , \quad u_2 = 2 - 4 = -2 \quad , \quad u_3 = 3 - 4 = -1 \quad , \quad u_4 = 4 - 4 = 0$

الأزواج المرتبة : $\{(1,-3), (2,-2), (3,-1), (4,0), \ldots\}$

3) $u_n = 3n^2$ واجب

4) $u_n = \frac{1}{2n}$

الحل :

$u_1 = \frac{1}{2(1)} = \frac{1}{2} \quad , \quad u_2 = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4} \quad , \quad u_3 = \frac{1}{2(3)} = \frac{1}{6} \quad , \quad u_4 = \frac{1}{2(4)} = \frac{1}{8}$

الأزواج المرتبة : $\left\{\left(1,\frac{1}{2}\right), \left(2,\frac{1}{4}\right), \left(3,\frac{1}{6}\right), \left(4,\frac{1}{8}\right), \ldots\right\}$

5) $u_n = 3n - 1$

الحل :

$u_1 = 3(1) - 1 = 3 - 1 = 2 \quad , \quad u_2 = 3(2) - 1 = 6 - 1 = 5$

$u_3 = 3(3) - 1 = 9 - 1 = 8 \quad , \quad u_4 = 3(4) - 1 = 12 - 1 = 11$

الأزواج المرتبة : $\{(1,2), (2,5), (3,8), (4,11), \ldots\}$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

أكتب الحدود الخمسة الاولى لكل متتابعة من المتتابعات الاتية :

6) متتابعة حسابية الحد الأول فيها (1) وأساسها (5) .

الحل :

$a = u_1 = 1 \quad , \quad d = 5$

$u_2 = u_1 + d = 1 + 5 = 6$, $u_3 = u_2 + d = 6 + 5 = 11$

$u_4 = u_3 + d = 11 + 5 = 16$, $u_5 = u_4 + d = 16 + 5 = 21$

المتتابعة الحسابية $\{1, 6, 11, 16, 21, \dots\}$

7) متتابعة حسابية الحد الأول فيها (-5) واساسها (2) .

الحل :

$a = u_1 = -5$, $d = 2$

$u_2 = u_1 + d = -5 + 2 = -3$, $u_3 = u_2 + d = -3 + 2 = -1$

$u_4 = u_3 + d = -1 + 2 = 1$, $u_5 = u_4 + d = 1 + 2 = 3$

المتتابعة الحسابية $\{-5, -3, -1, 1, 3, \dots\}$

8) متتابعة حسابية الحد الاول (-3) وأساسها (-4) .

الحل :

$a = u_1 = -3$, $d = -4$

$u_2 = u_1 + d = -3 - 4 = -7$, $u_3 = u_2 + d = -7 - 4 = -11$

$u_4 = u_3 + d = -11 - 4 = -15$, $u_5 = u_4 + d = -15 - 4 = -19$

المتتابعة الحسابية $\{-3, -7, -11, -15, -19, \dots\}$

أكتب حدود المتتابعات الاتية :

9) جد الحدود بين u_8 و u_{12} لمتتابعة حسابية حدها الثالث (9) و $d = -2$.

الحل :

$u_3 = 9$, $n = 3$, $d = -2$, $a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$u_3 = a + (3-1)(-2) \Rightarrow 9 = a + (2)(-2)$

$9 = a - 4 \Rightarrow a = 9 + 4 \Rightarrow a = 13$

$u_9 = 13 + (9-1)(-2) = 13 + (8)(-2) = 13 - 16 = -3$

$u_{10} = 13 + (10-1)(-2) = 13 + (9)(-2) = 13 - 18 = -5$

$u_{11} = 13 + (11-1)(-2) = 13 + (10)(-2) = 13 - 20 = -7$

المتتابعة الحسابية $\{\dots, -3, -5, -7, \dots\}$

10) جد الحدود بين u_6 و u_{10} لمتتابعة حسابية حدها السادس (-11) و $d=-3$.

الحل :

$u_6=-11 \quad , \quad n=6 \quad , \quad d=-3 \quad , \quad a=?$

$u_n=a+(n-1)d$

$u_6=a+(6-1)(-3) \Rightarrow -11=a+(5)(-3) \Rightarrow -11=a-15 \Rightarrow a=-11+15=4$

$u_7=4+(7-1)(-3)=4+(6)(-3)=4-18=-14$

$u_8=4+(8-1)(-3)=4+(7)(-3)=4-21=-17$

$u_9=4+(9-1)(-3)=4+(8)(-3)=4-24=-20$

المتتابعة الحسابية $\{\ldots, -20, -17, -14, \ldots\}$

11) أكتب الحد الثالث والعشرين من المتتابعة الحسابية $\{3, -1, -5, -9, \ldots\}$

الحل :

$u_{23}=? \quad , \quad n=23 \quad , \quad a=3 \quad , \quad d=-1-3=-4$

$u_n=a+(n-1)d$

$u_{23}=3+(23-1)(-4) \Rightarrow u_{23}=3+(22)(-4)$

$u_{23}=3-88 \Rightarrow u_{23}=-85$

أكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات الآتية :

12) $\{u_n\}=4n$ واجب

13) $\{u_n\}=2n-5$

الحل :

$u_1=2(1)-5=2-5=-3 \quad , \quad u_2=2(2)-5=4-5=-1$

$u_3=2(3)-5=6-5=1 \quad , \quad u_4=2(4)-5=8-5=3$

$u_5=2(5)-5=10-5=5$

المتتابعة $\{-3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$

14) $\{u_n\}=\frac{1}{n+1}$ واجب

15) $\{u_n\}=9$

الحل :

$u_1=9 \quad , \quad u_2=9 \quad , \quad u_3=9 \quad , \quad u_4=9 \quad , \quad u_5=9$

المتتابعة $\{9, 9, 9, 9, 9, \ldots\}$

تدرب وحل التمرينات : أكتب الازواج المرتبة الاربعة الأولى للمتتابعة التي حدها العام معطى :

16) $\{u_n\} = 10 - 4n$

الحل :

$u_1 = 10 - 4(1) = 10 - 4 = 6 \quad , \quad u_2 = 10 - 4(2) = 10 - 8 = 2$

$u_3 = 10 - 4(3) = 10 - 12 = -2 \quad , \quad u_4 = 10 - 4(4) = 10 - 16 = -6$

الأزواج المرتبة : $\{(1\,,6),\ (2\,,2),(3\,,-2),(4\,,-6)\,,\dots\}$

17) $\{u_n\} = n^2 - 1$

الحل :

$u_1 = (1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \quad , \quad u_2 = (2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$u_3 = (3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8 \quad , \quad u_4 = (4)^2 - 1 = 16 - 1 = 15$

الأزواج المرتبة : $\{(1\,,0),\ (2\,,),(3\,,8),(4\,,15)\,,\dots\}$

18) $\{u_n\} = \frac{1}{3n+1}$

الحل :

$u_1 = \frac{1}{3(1)+1} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4} \quad , \quad u_2 = \frac{1}{3(2)+1} = \frac{1}{6+1} = \frac{1}{7}$

$u_3 = \frac{1}{3(3)+1} = \frac{1}{9+1} = \frac{1}{10} \quad , \quad u_4 = \frac{1}{3(4)+1} = \frac{1}{12+1} = \frac{1}{13}$

الأزواج المرتبة : $\left\{\left(1\,,\frac{1}{4}\right),\ \left(2\,,\frac{1}{7}\right),\left(3\,,\frac{1}{10}\right),\left(4\,,\frac{1}{13}\right)\,,\dots\right\}$

أكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات الآتية :

19) متتابعة حسابية حدها السابع فيها $\left(\frac{1}{24}\right)$ وأساسها $\left(\frac{1}{3}\right)$.

الحل :

$u_7 = \frac{1}{24} \quad , \quad n = 7 \quad , \quad d = \frac{1}{3} \quad , \quad a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$u_7 = a + (7-1)\left(\frac{1}{3}\right)$

$\frac{1}{24} = a + (6)\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \frac{1}{24} = a + (2) \Rightarrow a = \frac{1}{24} - 2 \Rightarrow a = \frac{1-48}{24} = \frac{-47}{24}$

$$u_2 = \frac{-47}{24} + (2-1)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-47}{24} + \frac{1}{3} = \frac{-39}{24}$$

$$u_3 = \frac{-47}{24} + (3-1)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-47}{24} + \frac{2}{3} = \frac{-31}{24}$$

$$u_4 = \frac{-47}{24} + (4-1)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-47}{24} + \frac{3}{3} = \frac{-23}{24}$$

$$u_5 = \frac{-47}{24} + (5-1)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-47}{24} + \frac{5}{3} = \frac{-15}{24}$$

المتتابعة الحسابية $\{\frac{-47}{24}, \frac{-39}{24}, \frac{-31}{24}, \frac{-23}{24}, \frac{-15}{24}, \dots\}$

أكتب الحدود للمتتابعات الاتية :

20) جد الحدود بين u_{10} و u_{13} لمتتابعة حسابية حدها السابع $(\frac{13}{2})$ و $d = 1$.

الحل :

$$u_7 = \frac{13}{2} \quad , \quad n = 7 \quad , \quad d = 1 \quad , \quad a = ?$$

$$u_n = a + (n-1)d$$

$$u_7 = a + (7-1)(1) \Rightarrow \frac{13}{2} = a + (6) \Rightarrow a = \frac{13}{2} - 6 = \frac{13-12}{2} = \frac{1}{2}$$

$$u_{11} = \frac{1}{2} + (11-1)(1) = \frac{1}{2} + 10 = \frac{1+20}{2} = \frac{21}{2}$$

$$u_{13} = \frac{1}{2} + (13-1)(1) = \frac{1}{2} + 12 = \frac{1+24}{2} = \frac{25}{2}$$

المتتابعة الحسابية $\left\{\dots, \frac{21}{2}, \frac{25}{2}, \dots\right\}$

21) جد الحدود بين u_{20} و u_{23} لمتتابعة حسابية حدها الثاني (0) و $d = -1$. واجب

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

حدد نوع المتتابعة (متزايدة ، متناقصة ، ثابتة) لكل مما يأتي :

22) $\{u_n\} = \{3 - 2n\}$

الحل :

$$u_1 = 3 - 2(1) = 3 - 2 = 1 \quad , \quad u_2 = 3 - 2(2) = 3 - 4 = -1$$

$d = u_2 - u_1 = -1 - 1 = -2$ المتتابعة متناقصة لأن : $d < 0$

23) $\{u_n\} = \{n^3 - 1\}$ واجب

24) $\{u_n\} = \{\frac{1}{n+2}\}$

الحل :

$$u_1 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \quad , \quad u_2 = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

$d = u_2 - u_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3-4}{12} = \frac{-1}{12}$ المتتابعة متناقصة لأن : $d < 0$

أكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الاتية :

$25)\ \{u_n\} = \frac{3n}{2}$

الحل :

$u_1 = \frac{3(1)}{2} = \frac{3}{2}$, $u_2 = \frac{3(2)}{2} = \frac{6}{2} = 3$, $u_3 = \frac{3(3)}{2} = \frac{9}{2}$

$u_4 = \frac{3(4)}{2} = \frac{12}{2} = 6$, $u_5 = \frac{3(5)}{2} = \frac{15}{2}$

المتتابعة : $\{\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2}, 6, \frac{15}{2}, \dots\}$

$26)\ \{u_n\} = \sqrt{3}$

الحل :

$u_1 = \sqrt{3}$, $u_2 = \sqrt{3}$, $u_3 = \sqrt{3}$, $u_4 = \sqrt{3}$, $u_5 = \sqrt{3}$

المتتابعة : $\{\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \dots\}$

$27)\ \{u_n\} = \frac{n}{n+1}$ واجب

تدرب وحل مسائل حياتية

28) رياضة الجري : في إحدى مسابقات الجري سجلت أوقات الفائز الأول وفقا للجدول الاتي :



المسافة بالكيلو متر	1	2	3	4	5
الوقت بالدقيقة والثانية	3.12	6.32	9.52	12.72	15.92

أكتب مجموعة الأزواج المرتبة من الجدول ، هل يمثل الجدول نمطا ؟ هل يمثل متتابعة ؟ علل اجابتك

الحل : نعم يمثل نمطا ويمثل متتابعة لأن الفائز يسجل كل 1 كيلو متر وقت والأزواج المرتبة هي :

الأزواج المرتبة $\{(1, 3.12), (2, 6.32), (3, 9.52), (4, 12.72), (5, 15.92)\}$

العلاقة تمثل متتابعة حسابية حدها الأول 3.12 وأساسها $d = 6.32 - 3.12 = 3.20$

المتتابعة هي : $\{3.12, 6.32, 9.52, 12.72, 15.92\}$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

29) رياضة القفز بالزانة : يبين الجدول التالي محاولات أحد أبطال العالم في رياضة القفز بالزانة .



المحاولة	1	2	3	4	5
الارتفاع بالمتر	5.90	5.95	6.00	6.05	6.10

أكتب مجموعة الأزواج المرتبة من الجدول ، هل يمثل الجدول نمطا ؟ هل يمثل متتابعة ؟ علل اجابتك

الحل : نعم يمثل نمطا ويمثل متتابعة لأن الفائز يسجل كل قفزة زيادة مقدارها 0.05 من المتر .

الأزواج المرتبة $\{(1\,, 5.90), (2\,, 5.95), (3\,, 6.00), (4\,, 6.05), (5\,, 6.10)\}$

العلاقة تمثل متتابعة حسابية حدها الأول 5.90 وأساس المتتابعة هو $d = 5.95 - 5.90 = 0.05$

المتتابعة هي : $\{5.90\,, 5.95\,, 6.00\,, 6.05\,, 6.10\}$



30) زراعة : أشترى حسان مزرعة الأبقار فيها 20 بقرة وبدأت تزداد كل سنة نتيجة الولادات بمعدل ثابت حتى أصبح عدده الضعف بعد مضي ست سنوات مثل المسألة بجدول وأكتب حدود المتتابعة .

الحل :

$a = 20 \quad , \quad u_6 = 2a = 2\,(20) = 40 \quad , \quad n = 6 \quad , \quad d = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$u_6 = 20 + (6-1)d \Rightarrow 40 = 20 + 5d$

$5d = 40 - 20 \Rightarrow 5d = 20 \Rightarrow d = \frac{20}{5} = 4$

$u_1 = 20$

$u_2 = u_1 + d = 20 + 4 = 24 \quad , \quad u_3 = u_2 + d = 24 + 4 = 28$

$u_4 = u_3 + d = 28 + 4 = 32 \quad , \quad u_5 = u_4 + d = 32 + 4 = 36$

$u_6 = u_5 + d = 36 + 4 = 40$

السنة	1	2	3	4	5	6
عدد الأبقار	20	24	28	32	36	40

المتتابعة هي $\{20\,, 24\,, 28\,, 32\,, 36\,, 40\}$

فكر

31) تحد : جد قيمة x التي تجعل الحدود الثلاثة الأولى للمتتابعات الحسابية كما يأتي :

$\{2x\,, x+1\,, 3x+11\,, \ldots\}$

الحل :

$d = u_2 - u_1 = u_3 - u_2$

$x + 1 - (2x) = 3x + 11 - (x+1)$

$x + 1 - 2x = 3x + 11 - x - 1$

$-x + 1 = 2x + 10$

$-x - 2x = 10 - 1 \Rightarrow -3x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{-3} = -3$

32) أصحح الخطأ : قالت رابحة أن المتتابعة التي حدها العام $u_n = 8 - 2n$ متتابعة متزايدة لأن $d > 0$ أكتشف خطأ رابحة وصححه .

الحل :

$u_1 = 8 - 2(1) = 8 - 2 = 6$

$u_2 = 8 - 2(2) = 8 - 4 = 4$

$d = u_2 - u_1 = 4 - 6 = -2$

المتتابعة متناقصة لأن $d < 0$

33) حس عددي : ما هو الحد الحادي عشر لمتتابعة حدها الثالث 4 وأساسها $\frac{-1}{2}$ ؟

الحل :

$u_{11} = ? \quad n = 11 \quad , \quad u_3 = 4 \quad , \quad n = 3 \quad , \quad d = \frac{-1}{2} \quad , \quad a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$u_3 = a + (3-1)\left(\frac{-1}{2}\right) \Rightarrow 4 = a + (2)\left(\frac{-1}{2}\right) \Rightarrow 4 = a - 1$

$4 + 1 = a \Rightarrow a = 5$

$u_{11} = a + (n-1)d \Rightarrow u_{11} = 5 + (11-1)\left(\frac{-1}{2}\right)$

$u_{11} = 5 + (10)\left(\frac{-1}{2}\right) \Rightarrow u_{11} = 5 - 5 = 0$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

أكتب : الحد الذي ترتيبه 101 في المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس (-4) وأساسها 2 .

الحل :

$u_{101} = ? \quad , \quad n = 101 \quad , \quad u_5 = -4 \quad , \quad n = 5 \quad , \quad d = 2 \quad , \quad a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$u_5 = a + (5-1)(2) \Rightarrow -4 = a + (5-1)(2)$

$-4 = a + (4)(2) \Rightarrow -4 = a + 8 \Rightarrow -4 - 8 = a \Rightarrow a = -12$

$u_{101} = -12 + (101-1)(2) = -12 + (100)(2) = -12 + 200 = 188$

مراجعة الفصل

تدريب : أكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الاتية :

1) $\{u_n\} = 3n - 2$

الحل :

$u_1 = 3(1) - 2 = 1 \quad , \quad u_2 = 3(2) - 2 = 4$

$u_3 = 3(3) - 2 = 7$, $u_4 = 3(4) - 2 = 10$

$u_5 = 3(5) - 2 = 13$

المتتابعة $\{1 , 4 , 7 , 10 , 13 , ...\}$

$2)\ \{u_n\} = \frac{1}{n}$ واجب

$3)\ \{u_n\} = \frac{2n-1}{n}$ واجب

$4)\ \{u_n\} = (-2)^n$

الحل :

$u_1 = (-2)^1 = -2$, $u_2 = (-2)^2 = 4$

$u_3 = (-2)^3 = -8$, $u_4 = (-2)^4 = 16$

$u_5 = (-2)^5 = -32$ المتتابعة $\{-2 , 4 , -8 , 16 , -32 , ...\}$

مثال : أكتب الحدود الخمسة الأولى لمتتابعة حسابية حدها السابع 6 وأساسها 3 .

الحل :

$u_7 = 6$, $n = 7$, $d = 3$, $a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$u_7 = a + (7-1)(3) \Rightarrow 6 = a + (6)(3) \Rightarrow 6 = a + 18$

$6 - 18 = a \Rightarrow a = -12$

المتتابعة $\{-12 , -9 , -6 , -3 , 0 , ...\}$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

تدريب : أكتب الحد العشرين من المتتابعة الحسابية $\{12 , 6 , 0 , -6 , -12\}$

الحل :

$u_{20} = ?$, $n = 20$, $a = 12$

$d = 6 - 12 = -6$

$u_n = a + (n-1)d$

$u_{20} = 12 + (20-1)(-6) \Rightarrow u_{20} = 12 + (19)(-6) = 12 - 114 = -102$

اختبار الفصل

أكتب الحدود للمتتابعات الآتية :

7) جد الحدود بين u_3 , u_8 لمتتابعة حسابية حدها الثاني $\frac{-3}{2}$ و $d = 2$

الحل :

$u_2 = \frac{-3}{2}$, $n = 2$, $d = 2$, $a = ?$

$$u_n = a + (n-1)d$$

$$u_2 = a + (2-1)(2) \quad \Rightarrow \quad \frac{-3}{2} = a + (1)(2) \quad \Rightarrow \quad \frac{-3}{2} = a + 2$$

$$a = \frac{-3}{2} - 2 = \frac{-3-4}{2} = \frac{-7}{2}$$

$$u_4 = \frac{-7}{2} + (4-1)(2) = \frac{-7}{2} + (3)(2) = \frac{-7}{2} + 6 = \frac{-7+12}{2} = \frac{5}{2}$$

$$u_5 = \frac{-7}{2} + (5-1)(2) = \frac{-7}{2} + (4)(2) = \frac{-7}{2} + 8 = \frac{-7+16}{2} = \frac{9}{2}$$

$$u_6 = \frac{-7}{2} + (6-1)(2) = \frac{-7}{2} + (5)(2) = \frac{-7}{2} + 10 = \frac{-7+20}{2} = \frac{13}{2}$$

المتتابعة $\{\ldots, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2} \ldots\}$

8) جد الحدود بين u_4 , u_9 لمتتابعة حسابية حدها الثالث 6 و $d = \frac{-5}{2}$

الحل :

$$u_3 = 6 \quad , \quad n = 3 \quad , \quad d = \frac{-5}{2} \quad , \quad a = ?$$

$$u_n = a + (n-1)d$$

$$u_3 = a + (3-1)\left(\frac{-5}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad 6 = a + (2)\left(\frac{-5}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad 6 = a - 5$$

$$6 + 5 = a \quad \Rightarrow \quad a = 11$$

$$u_5 = 11 + (5-1)\left(\frac{-5}{2}\right) = 11 + (4)\left(\frac{-5}{2}\right) = 11 - 10 = 1$$

$$u_6 = 11 + (6-1)\left(\frac{-5}{2}\right) = 11 + (5)\left(\frac{-5}{2}\right) = 11 - \frac{25}{2} = \frac{22-25}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$u_7 = 11 + (7-1)\left(\frac{-5}{2}\right) = 11 + (6)\left(\frac{-5}{2}\right) = 11 - 15 = -4$$

$$u_8 = 11 + (8-1)\left(\frac{-5}{2}\right) = 11 + (7)\left(\frac{-5}{2}\right) = 11 - \frac{35}{2} = \frac{22-35}{2} = \frac{-13}{2}$$

المتتابعة $\{\ldots 1, \frac{-3}{2}, -4, \frac{-13}{2} \ldots\}$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

حدد نوع المتتابعة (متزايدة ، متناقصة ، ثابتة) لكل مما يأتي :

9) $u_n = 9 - 3n$ واجب

10) $u_n = n^2 - 2$

الحل :

$$u_1 = (1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1 \quad , \quad u_2 = (2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$



$d = u_2 - u_1 = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$

المتتابعة متزايدة لأن $d > 0$

11) $u_n = \frac{1}{3n+1}$ واجب

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

أكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الاتية :

12) $\{u_n\} = \frac{n}{n+2}$

الحل :

$u_1 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$, $u_2 = \frac{2}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$

$u_4 = \frac{4}{4+2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $u_5 = \frac{5}{5+2} = \frac{5}{7}$

المتتابعة $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \dots\}$

13) $\{u_n\} = 4\sqrt{2}$ واجب

14) $\{u_n\} = \frac{-n}{n+5}$ واجب

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

المتباينات المركبة

فكرة الدرس :

حل المتباينات التي تحتوي أدوات الربط (و) ، (أو) وتمثيل الحل على مستقيم الاعداد

المفردات :

❖ المتباينات ❖ التقاطع ❖ الاتحاد ❖ مجموعة الحل

المتباينات المركبة التي تتضمن (و)

المتباينة المركبة التي تحتوي (و) مؤلفة من متباينتين فأنها تكون صحيحة فقط اذا كانت المتباينتان صحيحتين وعليه

فأن مجموعة الحل عبارة عن مجموعة تقاطع حل المتباينتين ويمكن ايجاده بطريقتين :

الطريقة الأولى : بيانيا بتمثيل حل المتباينتين على مستقيم الاعداد ثم تحديد منطقة التقاطع .

الطريقة الثانية : جبريا وذلك بايجاد مجموعة الحل لكل متباينة ثم أخذ مجموعة التقاطع لهما $(S = S_1 \cap S_2)$.

ملاحظة : تحتوي المتباينة على الرمز $\neq , > , < , \geq , \leq$

طريقة حل المتباينة المركبة التي تتضمن أداة الربط (و)

١) التخلص من الكسور والأقواس إن وجدت .

٢) وضع المتغير في الوسط .

٣) اذا كان هناك عدد مع التغير تفصل بينهما عملية الجمع أو الطرح فنقوم بنقل العدد الى طرفي المتباينة مع تغير الأشارة .

٤) اذا كان المتغير يحتوي على معامل فنقوم بقسمة أطراف المتباينة على معامل المتغير.

٥) نجد مجموعة حل المتباينة المركبة وذلك بطريقتين :

الطريقة الأولى : بيانيا

- تتم تجزئة المتباينة الى جزئين ونحل كل جزء على حدة ونستخرج مجموعة الحل لكل جزء من المتباينة .
- نجد تقاطع مجموعة الحلين على خط الاعداد حيث أن التقاطع يمثل مجموعة حل المتباينة المركبة .

الطريقة الثانية : جبريا هو ان الجزء الأول من المتباينة يرمز لمجموعة حله S_1 والجزء الثاني من المتباينة يرمز لمجموعة حله S_2 ومنها نجد $S = S_1 \cap S_2$.

ملاحظة : عند ضرب أو قسمة أطراف المتباينة المركبة على عدد سالب فأن الترتيب يتغير (تقلب رموز المتباينة) .

ملاحظة : اذا كانت المتباينة المركبة تحتوي على رمز $\leq$ أو $\geq$ فأن التمثيل على خط الأعداد يكون بفجوة ممتلئة بالصورة (●) أي أن العدد داخل ضمن الفترة . أما اذا كانت المتباينة المركبة تحتوي على الرمز $>$ أو $<$ فإن التمثيل على خط الاعداد يكون بفجوة فارغة بالصورة (o) أي أن العدد غير داخل ضمن الفترة .

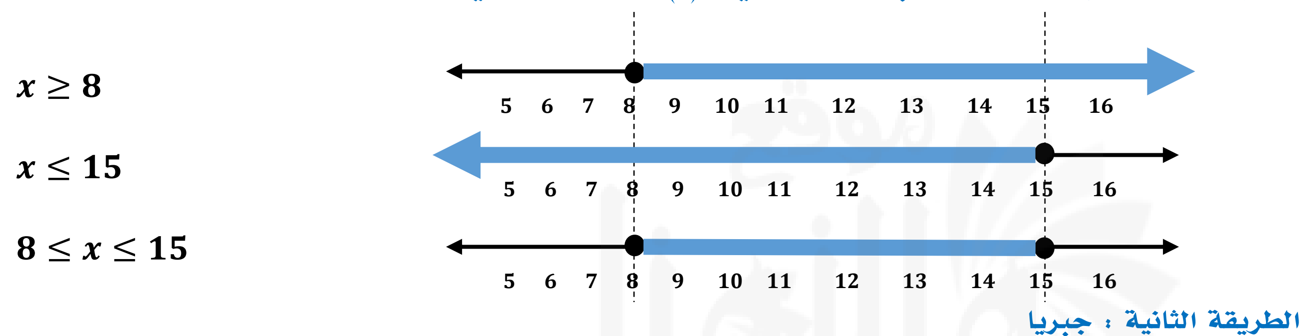
❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

مثال : تقاس درجة حرارة الجو خلال اليوم الواحد بدرجة الحرارة السيليزية الصغرى في مدينة بغداد في شهر كانون الأول $8°C$ ودرجة الحرارة السيليزية الكبرى $15°C$ ، أكتب متباينة تمثل درجة الحرارة في بغداد وجد حلها .

الحل : درجة الحرارة (الصغرى) لا تقل عن $8°C$ $(x \geq 8)$ ، درجة الحرارة (الكبرى) لا تزيد على $15°C$ $(x \leq 15)$ لا تقل درجة عن $8°C$ ولا تزيد عن $15°C$ تكتب بالشكل $(8 \leq x \leq 15)$

ويمكن حلها بأحدى الطريقتين :

الطريقة الأولى : بيانيا وتقرأ x أكبر من أو تساوي 8 (و) أقل من أو تساوي 15



الطريقة الثانية : جبريا

$$8 \leq x \leq 15 \Leftrightarrow x \geq 8 \quad \text{و} \quad x \leq 15$$

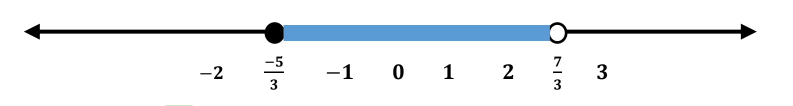
$$S = S_1 \cap S_2 = \{x : x \geq 8\} \cap \{x : x \leq 15\}$$

مثال : حل المتباينة المركبة التي تتضمن (و) $-3 \leq 3x + 2 < 9$ جبريا ومثل الحل على مستقيم الاعداد .

الحل :

$$-3 \leq 3x + 2 < 9$$

$$-3 - 2 \leq 3x < 9 - 2$$



$$-5 \le 3x < 7$$

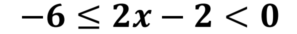
$$\frac{-5}{3} \le \frac{3x}{3} < \frac{7}{3}$$

$$\frac{-5}{3} \le x < \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad S = \left\{x : \frac{-5}{3} \le x < \frac{7}{3}\right\}$$

مثال : حل المتباينة المركبة التي تتضمن (و) جبريا ومثل الحل على مستقيم الاعداد .

$$2x - 2 \ge -6 \quad \text{و} \quad 2x - 2 < 0$$

الحل : تكتب المتباينة المركبة بالصورة



$$-6 \le 2x - 2 < 0$$

−3 −2 −1 0 1 2 3

$$-6 + 2 \le 2x < 0 + 2$$

$$-4 \le 2x < 2$$

$$\frac{-4}{2} \le \frac{2x}{2} < \frac{2}{2}$$

$$-2 \le x < 1 \quad \Rightarrow \quad S = \{x : -2 \le x < 1\}$$

المتباينات المركبة التي تتضمن (أو)

طريقة حل المتباينة هي نفس طريقة حل المتباينة المركبة التي تتضمن أداة الربط (و) لكن بدل أن تأخذ مجموعة تقاطع الجزئين تأخذ مجموعة اتحاد الجزئين $S = S_1 \cup S_2$.

مثال : حل المتباينة المركبة $x + 3 > 2$ أو $x + 3 \le -2$ بيانيا وجبريا .

الحل : الطريقة الأولى : بيانيا

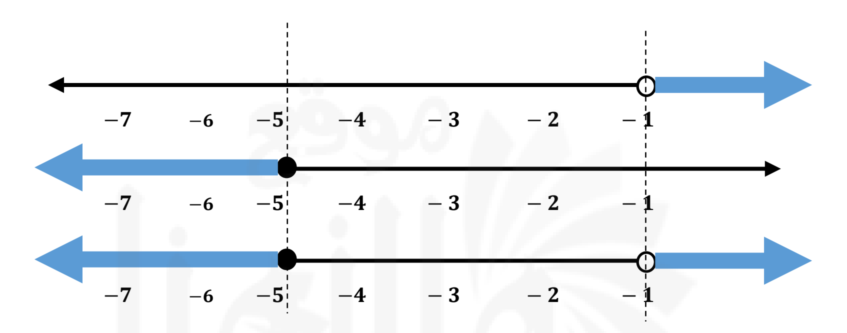
$$x + 3 > 2 \quad \Rightarrow \quad x > 2 - 3$$

$$x > -1$$

$$x + 3 \le -2 \quad \Rightarrow \quad x \le -2 - 3$$

$$x \le -5$$

$$x \le -5 \quad \text{أو} \quad x > -1$$



الطريقة الثانية : جبريا

$$x + 3 \le -2 \quad \text{أو} \quad x + 3 > 2$$

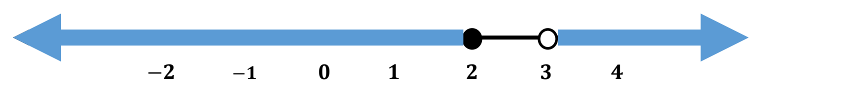
$$x \le -2 - 3 \quad \text{أو} \quad x > 2 - 3$$

$$x \le -5 \quad \text{أو} \quad x > -1 \quad \Rightarrow \quad S = S_1 \cup S_2 = \{x : x > -1\} \cup \{x : x \le -5\}$$

مثال : حل المتباينة التي تتضمن (أو) جبريا ومثل الحل على مستقيم الاعداد :

$y - 3 \leq -1$ أو $y + 3 > 6$

الحل :



$y - 3 \leq -1$ أو $y + 3 > 6$

$y \leq -1 + 3$ أو $y > 6 - 3$

$y \leq 2$ أو $y > 3$

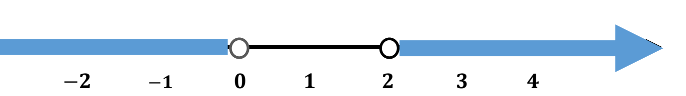
$$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \leq 2\} \cup \{y : y > 3\}$$

مثال : حل المتباينة التي تتضمن (أو) جبريا ومثل الحل على مستقيم الاعداد :

$$\frac{2v+1}{3} > \frac{5}{3} \quad \text{أو} \quad \frac{2v+1}{3} < \frac{1}{3}$$

الحل : نتخلص من الكسور

$\left[\frac{2v+1}{3} > \frac{5}{3}\right] \times 3$ أو $\left[\frac{2v+1}{3} < \frac{1}{3}\right] \times 3$



$2v + 1 > 5$ أو $2v + 1 < 1$

$2v > 5 - 1$ أو $2v < 1 - 1$

$2v > 4$ أو $2v < 0$

$\frac{2v}{2} > \frac{4}{2}$ أو $\frac{2v}{2} < \frac{0}{2}$

$v > 2$ أو $v < 0$

$S = S_1 \cup S_2 = \{v : v > 2\} \cup \{v : v < 0\}$

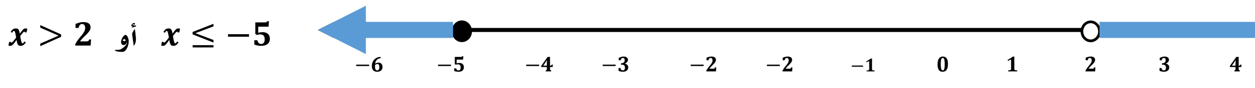
مثال : حل المتباينة المركبة جبريا ومثلها على مستقيم الاعداد:

$x + 1 > 3$ أو $x + 1 \leq -4$

الحل :

$x > 3 - 1$ أو $x \leq -4 - 1$

$x > 2$ أو $x \leq -5$



$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x > 2\} \cup \{x : x \leq -5\}$

المتباينة المثلثية

المتباينة المثلثية : في كل مثلث مجموع طول ضلعين من أضلاعه يكون أكبر من طول الضلع الثالث . اذا كانت اطوال اضلاع المثلث ABC فيجب ان تكون المتباينات الثلاث صحيحة :

$$A + B > C \quad , \quad A + C > B \quad , \quad B + C > A$$

مثال : هل يمكن للقطع المستقيمة التي طولها $13\ cm$, $10\ cm$, $2\ cm$ أن تشكل مثلثا ؟

الحل : شرط المثلث مجموع كل ضلعين ويجب أن يكون أكبر من الضلع الثالث .

$2 + 10 \ngtr 13 \Rightarrow 12 \ngtr 13$ خطأ لأن 12 أصغر من 13

$2 + 13 > 10 \Rightarrow 15 > 10$ صحيحة

$10 + 13 > 2 \Rightarrow 23 > 2$ صحيحة

لا يمكن أن يشكل مثلثا

مثال : أكتب متباينة مركبة تبين طول الضلع الثالث في مثلث طول ضلعين فيه $10\ cm , 8\ cm$

الحل : نفرض طول الضلع الثالث x ، أطوال اضلاع المثلث $10 , 8 , x$

$10 + 8 > x \Rightarrow 18 > x$ الضلع الثالث أصغر من 18

$10 + x > 8 \Rightarrow x > 8 - 10 \Rightarrow x > -2$ يهمل

$8 + x > 10 \Rightarrow x > 10 - 8 \Rightarrow x > 2$ الضلع الثالث أكبر من 2

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $2 < x < 18$ أو تكتب : $18 > x > 2$

تأكد من فهمك

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) بيانيا :

$1)\ -4 \le y - 1 < 3$

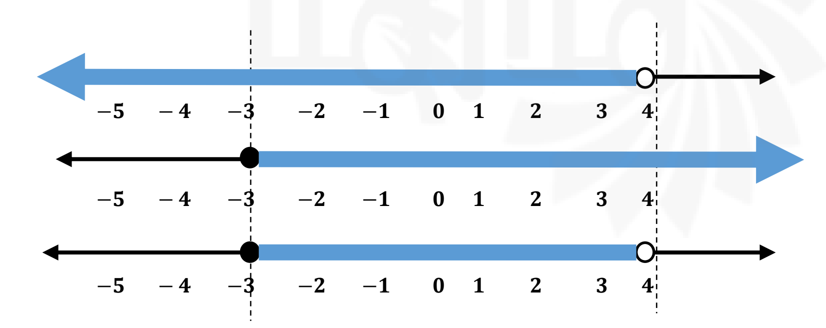
$-4 + 1 \le y < 3 + 1$

$-3 \le y < 4$

$y < 4$

$y \ge -3$

$-3 \le y < 4$





$2) -4 \leq z + 2 < 8$

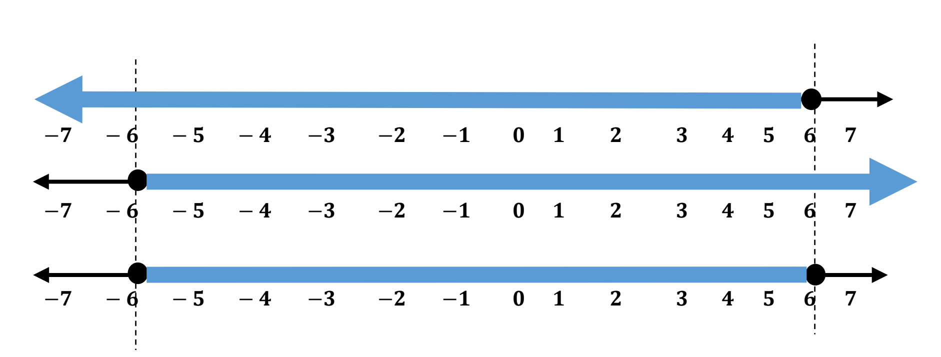
$-4 - 2 \leq z < 8 - 2$

$-6 \leq z < 6$

$z \leq 6$

$z \geq -6$

$-6 \leq z < 6$



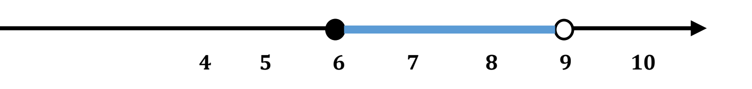
حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبريا ومثل مجموعة الحل على مستقيم الاعداد :

$3)\ x + 6 \geq 12$ و $x + 6 < 15$

الحل :

$x \geq 12 - 6$ و $x < 15 - 6$

$x \geq 6$ و $x < 9$



$S = S_1 \cap S_2 = \{x : x \geq 6\} \cap \{x : x < 9\} = \{x : 6 \leq x < 9\}$

$4)\ -9 < 2x - 1 \leq 3$

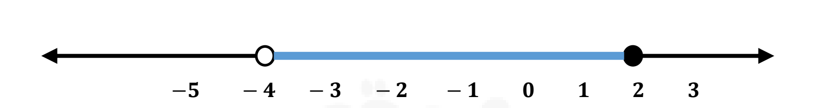
الحل :

$-9 + 1 < 2x \leq 3 + 1$

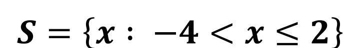
$-8 < 2x \leq 4$

$\frac{-8}{2} < \frac{2x}{2} \leq \frac{4}{2}$

$-4 < x \leq 2$



$S = \{x :\ -4 < x \leq 2\}$



حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) بيانيا

$5)\ 8y \geq 64$ أو $8y \leq 32$ واجب

$6)\ \frac{2z}{3} < \frac{2}{3}$ أو $\frac{2z}{3} \geq \frac{8}{9}$

الحل :

$\frac{2z}{3} < \frac{2}{3}] \times 3 \Rightarrow \frac{2z}{3} \times 3 < \frac{2}{3} \times 3 \Rightarrow 2z < 2$

$\frac{2z}{2} < \frac{2}{2} \Rightarrow z < 1$

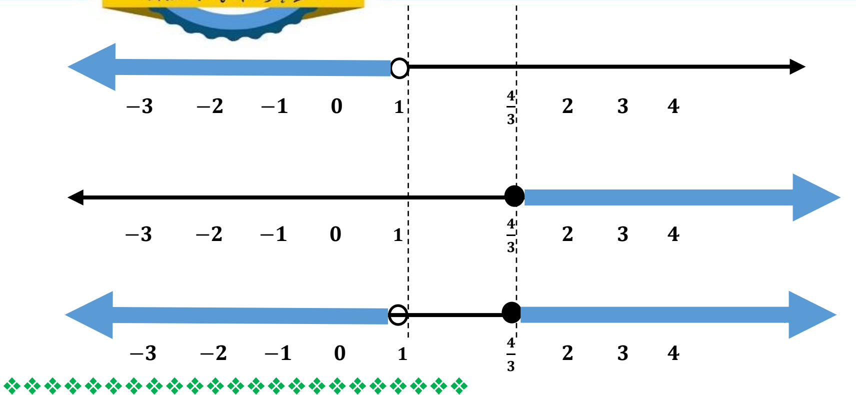
$\frac{2z}{3} \geq \frac{8}{9}] \times 9 \Rightarrow \frac{2z}{3} \times 9 \geq \frac{8}{9} \times 9$

$2z \times 3 \geq 8$

$6z \geq 8 \,]\, \div 6$

$\frac{6z}{6} \geq \frac{8}{6} \Rightarrow z \geq \frac{4}{3}$

$z < 1$ أو $z \geq \frac{4}{3}$



حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبريا ومثل الحل على مستقيم الاعداد :

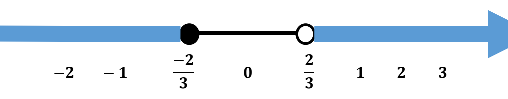
7) $3n - 7 > -5$ أو $3n - 7 \leq -9$

الحل :

$3n > -5 + 7$ أو $3n \leq -9 + 7$

$3n > 2$ أو $3n \leq -2 \Rightarrow \frac{3n}{3} > \frac{2}{3}$ أو $\frac{3n}{3} \leq \frac{-2}{3}$

$n > \frac{2}{3}$ أو $n \leq \frac{-2}{3}$



$S = S_1 \cup S_2 = \left\{n : n > \frac{2}{3}\right\} \cup \left\{n : n \leq \frac{-2}{3}\right\}$

8) $x + 15 \geq 30$ أو $x + 15 < 22$ واجب

هل يمكن رسم مثلث أطوال اضلاعه كما يأتي :

9) $1\ cm$, $2\ cm$, $\sqrt{3}\ cm$

الحل :

$1 + 2 > \sqrt{3} \Rightarrow 3 > \sqrt{3}$ صحيحة

$1 + \sqrt{3} > 2 \Rightarrow 1 + 1.7 > 2 \Rightarrow 2.7 > 2$ صحيحة

$2 + \sqrt{3} > 1 \Rightarrow 2 + 1.7 > 1 \Rightarrow 3.7 > 1$ صحيحة يمكن رسم مثلث

10) $5\ cm$, $4\ cm$, $9\ cm$

الحل :

$5 + 4 \ngtr 9 \Rightarrow 9 \ngtr 9$

لأن 9 ليس أكبر من 9

$5 + 9 > 4 \Rightarrow 14 > 4$ صحيحة

$4 + 9 > 5 \Rightarrow 13 > 5$ صحيحة

لا يمكن رسم مثلثا

$11)\ 1\ cm\ ,\ \sqrt{2}\ cm\ ,\ \sqrt{2}\ cm$ واجب

$12)\ 3\ cm\ ,\ 4\ cm\ ,\ \sqrt{3}cm$ واجب

تدرب وحل التمرينات

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) بيانيا :

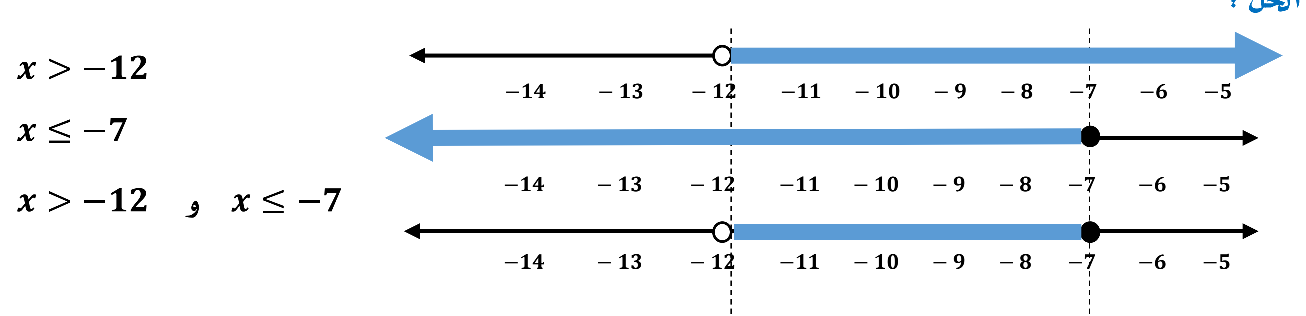
$13)\ x > -12$ و $x \leq -7$

الحل :

$x > -12$

$x \leq -7$

$x > -12$ و $x \leq -7$



$14)\ \ 2 \leq y + 4 < 6$

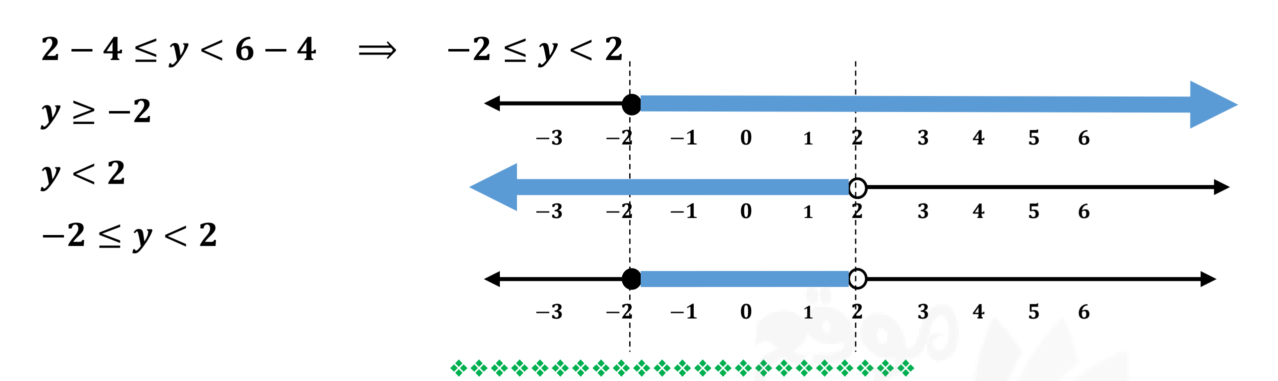
الحل :

$2 - 4 \leq y < 6 - 4 \quad \Rightarrow \quad -2 \leq y < 2$

$y \geq -2$

$y < 2$

$-2 \leq y < 2$



حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبريا ومثل مجموعة الحل على مستقيم الاعداد :

$15)\ \ 14 \leq 3x + 7$ و $3x + 7 < 25$

الحل :

$14 - 7 \leq 3x$ و $3x < 25 - 7$

$7 \leq 3x$ و $3x < 18$

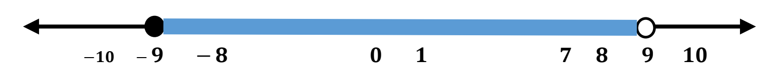
$\frac{7}{3} \leq \frac{3x}{3}$ و $\frac{3x}{3} < \frac{18}{3}$

$\frac{7}{3} \leq x$ و $x < 6 \quad \Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = \left\{x : \frac{7}{3} \leq x\right\} \cap \{x : x < 6\} = \left\{x : \frac{7}{3} \leq x < 6\right\}$

(مستقيم الأعداد: −1 0 1 2 $\frac{7}{3}$ 3 4 5 6 7)

16) $\frac{1}{25} \leq \frac{z+3}{5} \leq \frac{1}{15}$

الحل : نتخلص من الكسور بضرب اطراف المتباينة في المضاعف المشترك هو 75



$$\frac{1}{25} \leq \frac{z+3}{5} \leq \frac{1}{15}] \times 75$$

$$\frac{1}{25} \times 75 \leq \frac{z+3}{5} \times 75 \leq \frac{1}{15} \times 75$$

$$3 \leq 15(z+3) \leq 5 \quad \Rightarrow \quad 3 \leq 15z + 45 \leq 5 \quad \Rightarrow \quad 3 - 45 \leq 15z \leq 5 - 45$$

$$-42 \leq 15z \leq -40 \quad \Rightarrow \quad \frac{-42}{15} \leq \frac{15z}{15} \leq \frac{-40}{15}$$

$$\frac{-14}{5} \leq z \leq \frac{-8}{3}$$

$$S = \left\{z : \frac{-14}{5} \leq z \leq \frac{-8}{3}\right\}$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) بيانيا :

17) $z - 2 < -7$ أو $z - 2 > 4$

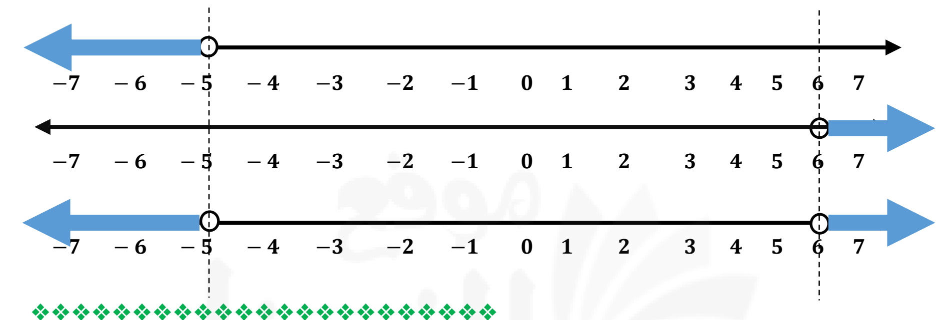
الحل :

$z < -7 + 2$ أو $z > 4 + 2 \quad \Rightarrow \quad z < -5$ أو $z > 6$

$z < -5$

$z > 6$

$z < -5$ أو $z > 6$



❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

18) $x - 6 \leq -1$ أو $x - 6 > 4$

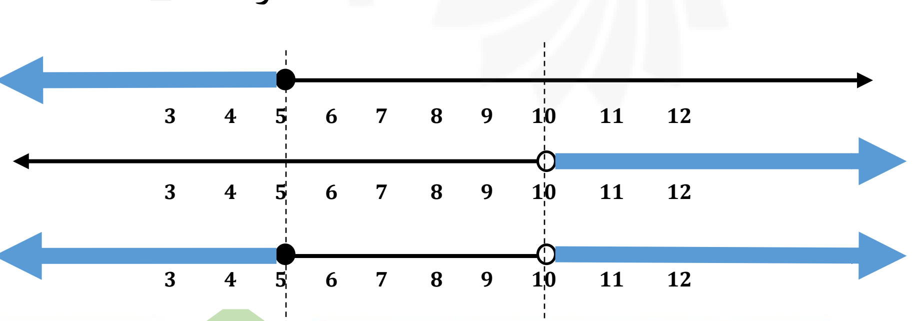
الحل :

$x \leq -1 + 6$ أو $x > 4 + 6 \quad \Rightarrow x \leq 5$ أو $x > 10$

$x \leq 5$

$x > 10$

$x \leq 5$ أو $x > 10$



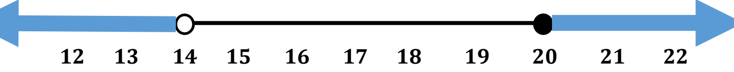
حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبريا ومثل الحل على مستقيم الاعداد :

19) $x + 8 < 22$ أو $x + 10 \geq 30$

الحل :

$x < 22 - 8$ أو $x \geq 30 - 10$

$x < 14$ أو $x \geq 20$



$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x < 14\} \cup \{x : x \geq 20\}$

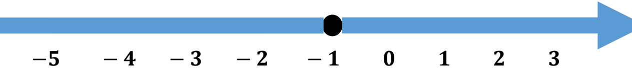
❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

20) $y \leq -1$ أو $y + 3 \geq 2$

الحل :

$y \leq -1$ أو $y \geq 2 - 3$

$y \leq -1$ أو $y \geq -1$



$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \leq -1\} \cup \{y : y \geq -1\}$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

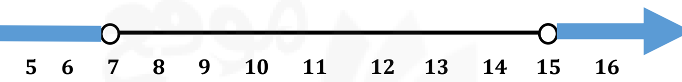
21) $\frac{y}{2} < 3\frac{1}{2}$ أو $\frac{y}{2} > 7\frac{1}{2}$

الحل : نتخلص من الكسور بضرب طرفي المتباينة في المضاعف المشترك هو 2

$\frac{y}{2} < \frac{7}{2}] \times 2$ أو $\frac{y}{2} > \frac{15}{2}] \times 2$

$\frac{y}{2} \times 2 < \frac{7}{2} \times 2$ أو $\frac{y}{2} \times 2 > \frac{15}{2} \times 2$

$y < 7$ أو $y > 15$



$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y < 7\} \cup \{y : y > 15\}$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

22) $5x \leq -1$ أو $5x \geq 4$

الحل :

$\frac{5x}{5} \leq \frac{-1}{5}$ أو $\frac{5x}{5} \geq \frac{4}{5}$

$x \leq \frac{-1}{5}$ أو $x \geq \frac{4}{5}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x : x \leq \frac{-1}{5}\right\} \cup \left\{x : x \geq \frac{4}{5}\right\}$

أكتب المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث اذا كان طولا ضلعي المثلث معلومين :

23) $3\ cm \ , \ 10\ cm$

الحل :

نفرض طول الضلع الثالث $x \Leftarrow$ أطوال اضلاع المثلث $3 \ , \ 10 \ , \ x$

الضلع الثالث أصغر من 13 $\quad 3 + 10 > x \ \Rightarrow 13 > x$

لا يعطي معلومات مفيدة $\quad 10 + x > 3 \ \Rightarrow x > 3 - 10 \ \Rightarrow x > -7$

الضلع الثالث أكبر من 7 $\quad 3 + x > 10 \ \Rightarrow x > 10 - 3 \ \Rightarrow x > 7$

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $7 < x < 13$

24) $6\ cm \ , \ 4\ cm$

الحل :

نفرض طول الضلع الثالث $x \Leftarrow$ أطوال اضلاع المثلث $6 \ , \ 4 \ , \ x$

الضلع الثالث أصغر من 10 $\quad 6 + 4 > x \ \Rightarrow 10 > x$

لا يعطي معلومات مفيدة $\quad 6 + x > 4 \ \Rightarrow x > 4 - 6 \ \Rightarrow x > -2$

الضلع الثالث أكبر من 2 $\quad 4 + x > 6 \ \Rightarrow x > 6 - 4 \ \Rightarrow x > 2$

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $2 < x < 10$

25) $1\ cm \ , \ 3\ cm$ واجب

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

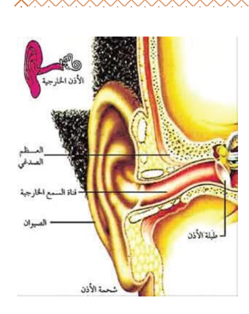
ملاحظة : ١) عبارة لا يقل يقصد بها أكبر أو يساوي

٢) عبارة لا يزيد عن يقصد بها أصغر أو يساوي

٣) عبارة يتراوح بين أو يقع بين يقصد بها أكبر من وأصغر من

تدرب وحل مسائل حياتية

26) صوت : أذن الأنسان يمكن أن تسمع الأصوات التي لا يقل ترددها عن 20 هيرتزا ولا يزيد عن 20000 هيرتز . أكتب المتباينة المركبة تمثل الترددات التي لا تسمعها أذن الأنسان ومثلها بيانيا .



الحل : نفرض التردد x

الترددات التي تسمعها أذن الانسان هي أكبر أو يساوي 20 وأصغر أو يساوي 20000 تكتب

$$20 \leq x \leq 20000$$

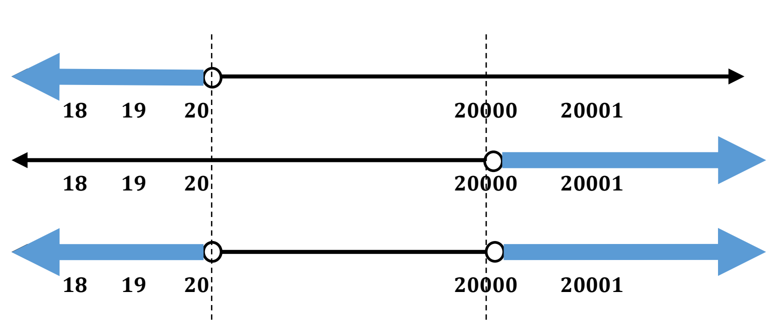
الترددات التي لا تسمعها أذن الانسان هي أصغر من 20 وأكبر من 20000 وتكتب :

$x < 20$ أو $x > 20000$

$x < 20$

$x > 20000$

$x < 20$ أو $x > 20000$



27) اطار السيارات : ضغط الهواء المثالي الموصى به لإطارات السيارات الصالون لا يقل عن $28\ Pascal\ (\frac{kg}{ing^2})$ ولا يزيد على $36\ Pascal$. أكتب المتباينة المركبة تمثل الضغط ومثلها بيانيا . (ملاحظة : باسكال وحدة قياس ضغط الهواء مقدرة $(\frac{kg}{ing^2}$



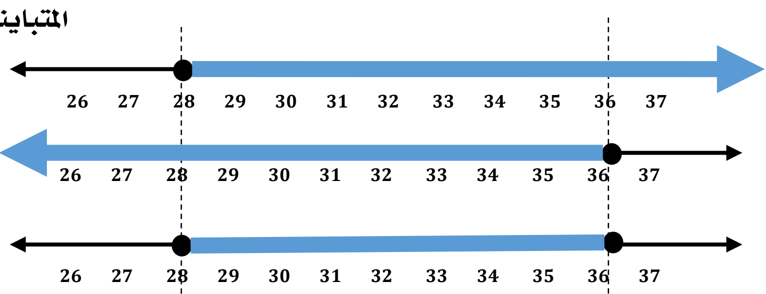
الحل : نفرض الضغط x

المتباينة المركبة $28 \le x \le 36$

$x \ge 28$

$x \le 36$

$28 \le x \le 36$



28) القطار المغناطيسي : القطار المغناطيسي المعلق وهو قطار يعمل بقوة الرفع المغناطيسية وباختصار يعرف بالماجليف. وصممت أنواع مختلفة من هذه القطارات المغناطيسية في مختلف دول العالم اذ ان سرعتها لا تقل عن 300 k/h ولا تزيد عن 550 k/h . أكتب متباينة تمثل سرعة القطار ومثلها بيانيا .



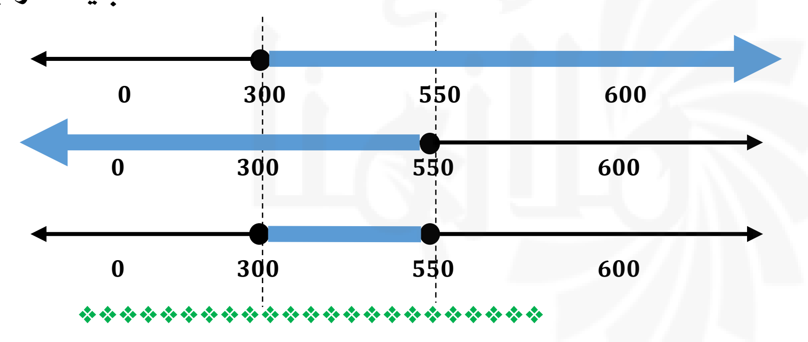
الحل : نفرض سرعة القطار x

المتباينة المركبة $300 \le x \le 550$

$x \ge 300$

$x \le 550$

$300 \le x \le 550$



❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

29) تحد : أكتب متباينة مركبة تبين مدى طول الضلع الثالث في كل مثلث :

$7\ cm \quad , \quad 12\ cm \quad , \quad x\ cm$

الحل :

الضلع الثالث أصغر من 19 $\quad 7 + 12 > x \Rightarrow 19 > x$



$12 + x > 7 \Rightarrow x > 7 - 12 \Rightarrow x > -5$ لا تعطي معلومات مفيدة

$7 + x > 12 \Rightarrow x > 12 - 7 \Rightarrow x > 5$ الضلع الثالث أكبر من 5

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $5 < x < 19$

30) أصحح الخطأ : قالت سوسن أن المتباينة المركبة $x + 3 \leq 5$ و $-4 < x + 3$ تمثل مجموعة الحل على مستقيم الاعداد الآتية : بين خطأ سوسن وصححه .

الحل :

$-4 - 3 < x$ و $x \leq 5 - 3$

$-7 < x$ و $x \leq 2$

$S = S_1 \cap S_2 = \{x :\ x > -7\} \cap \{x :\ x \leq 2\} = \{x : -7 < x \leq 2\}$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

31) حس عددي : أذكر ما اذا كانت الأطوال الثلاثة هي لمثلث أم لا ؟ وضح إجابتك .

1) $3.2\ cm$, $5.2\ cm$, $6.2\ cm$

الحل :

$3.2 + 5.2 > 6.2 \Rightarrow 8.4 > 6.2$ صحيحة

$3.2 + 6.2 > 5.2 \Rightarrow 9.4 > 5.2$ صحيحة

$5.2 + 6.2 > 3.2 \Rightarrow 11.4 > 3.2$ صحيحة

الأطوال الثلاثة تمثل مثلث

3) $1\ cm$, $1\ cm$, $\sqrt{2}\ cm$ واجب $\sqrt{2} = 1.4$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

أكتب : متباينة مركبة تمثل درجة الحرارة الصغرى $18°$ ودرجة الحرارة العظمى $27°$.

الحل : نفرض درجة الحرارة x

$x > 18°$ و $x < 27°$

$S = \{x : 18° < x < 27°\}$

مراجعة الفصل

تدريب 1 : حل المتباينة المركبة التي تتضمن (و) جبريا ومثل مجموعة الحل على مستقيم الاعداد :

$$-9 < 2x - 1 \leq 3$$

الحل :

$-9 + 1 < 2x \leq 3 + 1 \Rightarrow -8 < 2x \leq 4$

$\frac{-8}{2} < \frac{2x}{2} \leq \frac{4}{2}$

$-4 < x \leq 2 \Rightarrow S = \{x :\ -4 < x \leq 2\ \}$

تدريب 2 : حل المتباينة المركبة التي تتضمن (أو) جبريا ومثل مجموعة الحل على مستقيم الاعداد :

$$2y - 6 > -3 \quad \text{أو} \quad 2y - 6 \le -7$$

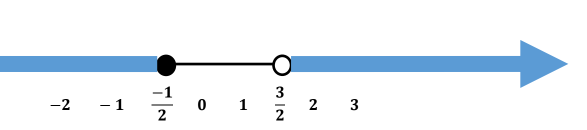
الحل :

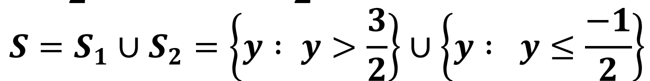
$2y > -3 + 6 \quad$ أو $\quad 2y \le -7 + 6$

$2y > 3 \quad$ أو $\quad 2y \le -1$

$\frac{2y}{2} > \frac{3}{2} \quad$ أو $\quad \frac{2y}{2} \le \frac{-1}{2}$

$y > \frac{3}{2} \quad$ أو $\quad y \le \frac{-1}{2}$





$S = S_1 \cup S_2 = \left\{y : \ y > \frac{3}{2}\right\} \cup \left\{y : \ \ y \le \frac{-1}{2}\right\}$

اختبار الفصل

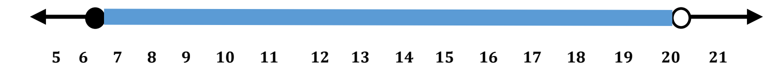
حل المتباينات المركبة ومثل مجموعة الحل على مستقيم الاعداد :

15) $x + 6 \ge 12 \quad$ و $\quad x + 6 < 20$

الحل :

$x \ge 12 - 6 \quad$ و $\quad x < 20 - 6$

$x \ge 6 \quad$ و $\quad x < 14$



$S = S_1 \cap S_2 = \{x : x \ge 6\} \cap \{x : x < 14\} = \{x : 6 < x \le 20\}$

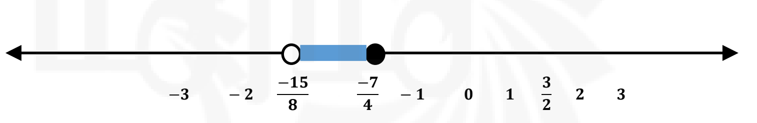
❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

16) $\frac{1}{16} < \frac{z+2}{2} \le \frac{1}{8}$

الحل : نتخلص من الكسور بضرب طرفي المتباينة بالمضاعف المشترك هو 16

$\frac{1}{16} < \frac{z+2}{2} \le \frac{1}{8}] \times 16$

$\frac{1}{16} \times 16 < \frac{z+2}{2} \times 16 \le \frac{1}{8} \times 16$



$1 < (z+2)8 \le 2$

$1 < 8z + 16 \le 2 \ \Rightarrow 1 - 16 < 8z \le 2 - 16 \ \Rightarrow -15 < 8z \le -14$

$\frac{-15}{8} < \frac{8z}{8} \le \frac{-14}{8} \Rightarrow \frac{-15}{8} < z \le \frac{-7}{4}$

$S = \left\{Z \ : \ \frac{-15}{8} < z \le \frac{-7}{4}\right\}$

17) $x - 3 \leq -5$ أو $x - 3 > 5$ واجب

18) $7t - 5 > -1$ أو $7t - 5 \leq -14$

الحل :

$7t > -1 + 5$ أو $7t \leq -14 + 5$

$7t > 4$ أو $7t \leq -9$

$\frac{7t}{7} > \frac{4}{7}$ أو $\frac{7t}{7} \leq \frac{-9}{7}$

$t > \frac{4}{7}$ أو $t \leq \frac{-9}{7}$

$-2 \quad \frac{-9}{7} \quad -1 \quad 0 \quad \frac{4}{7} \quad 1 \quad 2 \quad 3$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{t : t > \frac{4}{7}\right\} \cup \left\{t : t \leq \frac{-9}{7}\right\}$

19) $y \leq 0$ أو $y + 7 \geq 16$ واجب

20) $\frac{y}{3} < 1\frac{1}{3}$ أو $\frac{y}{3} > 9\frac{1}{3}$ واجب

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

أكتب المتباينة المركبة التي تبين مدى طول الضلع الثالث في المثلث اذا كان طولا ضلعي مثلث معلومين :

21) $4\ cm$, $9\ cm$

الحل : نفرض طول الضلع الثالث x ⟸ أطوال اضلاع المثلث 4 , 9 , x

$4 + 9 > x \Rightarrow 13 > x$ الضلع الثالث أصغر من 13

$9 + x > 4 \Rightarrow x > 4 - 9 \Rightarrow x > -5$ لا يعطي معلومات مفيدة

$4 + x > 9 \Rightarrow x > 9 - 4 \Rightarrow x > 5$ الضلع الثالث أكبر من 5

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $5 < x < 13$

22) $5\ cm$, $12\ cm$ واجب

23) $7\ cm$, $15\ cm$

الحل : نفرض طول الضلع الثالث x ⟸ أطوال اضلاع المثلث 7 , 15 , x

$7 + 15 > x \Rightarrow 22 > x$ الضلع الثالث أصغر من 22

$15 + x > 7 \Rightarrow x > 7 - 15 \Rightarrow x > -8$ لا يعطي معلومات مفيدة

$7 + x > 15 \Rightarrow x > 15 - 7 \Rightarrow x > 8$ الضلع الثالث أكبر من 8

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $8 < x < 22$

متباينات القيمة المطلقة

متباينات القيمة المطلقة التي على الصورة $|g(x)| < a$ ، $|g(x)| \le a$ حيث $a \in R$

متباينة القيمة المطلقة بعلاقة أصغر من (أصغر من أو يساوي) تمثل متباينة مركبة تتضمن (و) بصورة عامة :

$$|x| \le a \Rightarrow -a \le x \le a \quad , \quad a > 0$$

$$|x| < a \Rightarrow -a < x < a \quad , \quad a > 0$$

$$S = S_1 \cap S_2 = \{x : x \ge -a\} \cap \{x : x \le a\}$$

مثال : درجة حرارة حوض السباحة المثالية للماء 25 درجة سيليزية تزداد أو تنقص بمقدار درجة حرارة واحدة .
أكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل درجة حرارة الماء في الحوض ومثله بيانيا .

الحل : نفرض درجة حرارة الماء هي $1°C$.

لذا المتباينة التي تمثل درجة حرارة الحوض عندما لا تزيد عن $26°C$.

$$x \le 25 + 1 \Rightarrow x - 25 \le 1$$

المتباينة التي تمثل درجة حرارة الحوض عندما لا تنقص عن $24°C$

$$x \ge 25 - 1 \Rightarrow x - 25 \ge -1$$

لذا متباينة القيمة المطلقة هي المتباينة المركبة التي تمثل مدى درجة حرارة الماء في حوض السباحة :

$$x - 25 \le 1 \quad و \quad x - 25 \ge -1 \Rightarrow -1 \le x - 25 \le 1 \Leftrightarrow |x - 25| \le 1$$

تمثل مجموعة الحل على مستقيم الاعداد

22 23 24 25 26 27

مثال : حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الاعداد : $|x + 6| < 3$

الحل :

$$-3 < x + 6 < 3 \Rightarrow -3 - 6 < x < 3 - 6$$

$$-9 < x < -3$$

$$S = \{x : -9 < x < -3\}$$

−10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1

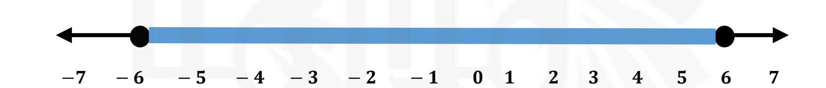
مثال : حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الاعداد : $|y| - 5 \le 1$

الحل :

$$|y| - 5 \le 1 \Rightarrow |y| \le 1 + 5 \Rightarrow |y| \le 6$$

$$-6 \le y \le 6$$

$$S = \{y : -6 \le y \le 6\}$$



❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

مثال : حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الاعداد : $|x + 1| < 5$

الحل :

$$-5 < x + 1 < 5 \Rightarrow -5 - 1 < x < 5 - 1$$

$$-6 < x < 4 \Rightarrow \quad S = \{x : -6 < x < 4\}$$

−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7

مثال : جد مجموعة الحل لمتباينات القيمة المطلقة الآتية :

$1)\ |2x-5|+3<11$

الحل :

$|2x-5|<11-3 \Rightarrow |2x-5|<8$

$-8<2x-5<8 \Rightarrow -8+5<2x<8+5 \Rightarrow -3<2x<13$

$\frac{-3}{2}<\frac{2x}{2}<\frac{13}{2} \Rightarrow \frac{-3}{2}<x<\frac{13}{2}$

$S=\left\{x:\frac{-3}{2}<x<\frac{13}{2}\right\}$

$2)\ |7-y|<8$

الحل :

$-8<7-y<8 \Rightarrow -8-7<-y<8-7$

$-15<-y<1\ ]\times -1 \Rightarrow 15>y>-1 \Rightarrow -1<y<15$

$S=\{y:-1<y<15\}$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

متباينات القيمة المطلقة التي على الصورة $|g(x)|>a$ ، $|g(x)|\geq a$ حيث $a\in R$

متباينة القيمة المطلقة بعلاقة أكبر من (أكبر من أو يساوي) هي متباينة مركبة تتضمن (أو) بصورة عامة :

$$|x|\geq a \Leftrightarrow x\geq a \text{ أو } x\leq -a \quad , \quad a>0$$

$$|x|>a \Leftrightarrow x>a \text{ أو } x<-a \quad , \quad a>0$$

$S=S_1\cup S_2=\{x:x\geq a\}\cup\{x:x\leq -a\}$

مثال : حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الاعداد : $|x+4|>2$

الحل :

$x+4>2$ أو $x+4<-2 \Rightarrow x>2-4$ أو $x<-2-4$

$x>-2$ أو $x<-6$

−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3

$S=S_1\cup S_2=\{x:\ x>-2\}\cup\{x:x<-6\}$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

مثال : حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الاعداد : $|5y-1|\geq 4$

الحل :

$5y-1\geq 4$ أو $5y-1\leq -4 \Rightarrow 5y\geq 4+1$ أو $5y\leq -4+1$

$5y\geq 5$ أو $5y\leq -3$

−3 −2 −1 $\frac{-3}{5}$ 0 1 2 3

$\frac{5y}{5}\geq\frac{5}{5}$ أو $\frac{5y}{5}\leq\frac{-3}{5} \Rightarrow y\geq 1$ أو $y\leq\frac{-3}{5}$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \geq 1\} \cup \left\{y : y \leq \frac{-3}{5}\right\}$$

مثال : في تحليلات دم الانسان البالغ يعد المدى الطبيعي للبوتاسيوم هو $(3.5 - 5.3)mol/L$ أكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المدى غير الطبيعي للبوتاسيوم في دم الانسان .

الحل : نفرض البوتاسيوم x

المتباينة التي تمثل كمية البوتاسيوم غير الطبيعية وأقل من القيمة الدنيا للمعدل هي : $x < 3.5$

المتباينة التي تمثل كمية البوتاسيوم غير الطبيعية وأكبر من القيمة العليا للمعدل هي : $x > 5.3$

المتباينة المركبة : $x > 5.3$ أو $x < 3.5$

نجد متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المدى غير الطبيعي للبوتاسيوم

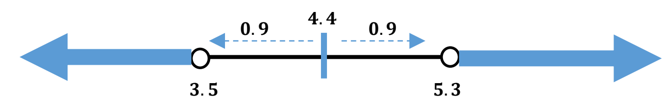
نجد منتصف المسافة بين النقطتين : $\frac{3.5+5.3}{2} = \frac{8.8}{2} = 4.4$

$$4.4 - 3.5 = 0.9 \quad , \quad 5.3 - 4.4 = 0.9$$

نضيف ونطرح نصف قطر المسافة :

$$x < 3.5 \text{ أو } x > 5.3 \Leftrightarrow x < 4.4 - 0.9 \text{ أو } x > 4.4 + 0.9$$

$$x - 4.4 < -0.9 \text{ أو } x - 4.4 > 0.9 \Leftrightarrow |x - 4.4| > 0.9$$



مثال : جد مجموعة الحل لمتباين القيمة المطلقة الآتية :

$$i)\ |2x - 5| + 3 < 11 \Rightarrow |2x - 5| < 8 \Rightarrow -8 < 2x - 5 < 8$$

$$-8 + 5 \leq 2x \leq 8 + 5 \Rightarrow -3 \leq 2x \leq 13 \Rightarrow \frac{-3}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{13}{2}$$

$$\frac{-3}{2} \leq x \leq \frac{13}{2} \Rightarrow \left\{x : x \geq \frac{-3}{2}\right\} \cap \left\{x : x \leq \frac{13}{2}\right\} = \left\{x : \frac{-3}{2} \leq x \leq \frac{13}{2}\right\}$$

$$ii)\ \left|\frac{2t - 8}{4}\right| \geq 9$$

الحل :

$$\left|\frac{2t - 8}{4}\right| \geq 9] \times 4 \Rightarrow \left|\frac{2t - 8}{4} \times 4\right| \geq 9 \times 4$$

$$|2t - 8| \geq 36 \Rightarrow 2t - 8 \geq 36 \text{ أو } 2t - 8 \leq -36$$

$$2t \geq 36 + 8 \text{ أو } 2t \leq -36 + 8$$

$$2t \geq 44 \text{ أو } 2t \leq -28 \Rightarrow \frac{2t}{2} \geq \frac{44}{2} \text{ أو } \frac{2t}{2} \leq \frac{-28}{2}$$

$$t \geq 22 \text{ أو } t \leq -14$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{t : t \geq 22\} \cup \{t : t \leq -14\}$$

$iii)\ \left|\frac{5-3v}{2}\right| \geq 6$

الحل :

$\left|\frac{5-3v}{2}\right| \geq 6] \times 2 \Rightarrow \left|\frac{5-3v}{2} \times 2\right| \geq 6 \times 2$

$|5-3v| \geq 12 \Rightarrow 5-3v \geq 12$ أو $5-3v \leq -12$

$-3v \geq 12-5$ أو $-3v \leq -12-5$

$-3v \geq 7$ أو $-3v \leq -17 \Rightarrow \frac{-3v}{-3} \leq \frac{7}{-3}$ أو $\frac{-3v}{-3} \geq \frac{-17}{-3}$

$v \leq \frac{7}{-3}$ أو $v \geq \frac{17}{3} \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \left\{v : v \leq \frac{7}{-3}\right\} \cup \left\{v : v \geq \frac{17}{3}\right\}$

مثال : حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الاعداد : $\left|\frac{3z-9}{6}\right| \geq 1$

الحل :

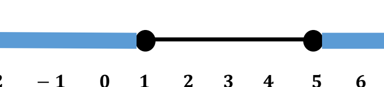
$\left|\frac{3z-9}{6}\right| \geq 1\ ] \times 6 \Rightarrow \left|\frac{3z-9}{6} \times 6\right| \geq 1 \times 6$

$|3z-9| \geq 6 \Rightarrow 3z-9 \geq 6$ أو $3z-9 \leq -6$

$3z \geq 6+9$ أو $3z \leq -6+9 \Rightarrow 3z \geq 15$ أو $3z \leq 3$

$\frac{3z}{3} \geq \frac{15}{3}$ أو $\frac{3z}{3} \leq \frac{3}{3} \Rightarrow z \geq 5$ أو $z \leq 1$

$S = S_1 \cup S_2 = \{z : z \geq 5\} \cup \{z : z \leq 1\}$



تأكد من فهمك

أكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المسائل التالية :

1) تعد درجة الحرارة المثلى داخل الشقق $22°$ سيليزية بزيادة أو نقصان لا يتجاوز $2°$ سيليزية .

الحل : نفرض درجة الحرارة x

المتباينة المركبة تكون بالصورة :

$x \leq 22+2$ و $x \geq 22-2$

$x-22 \leq 2$ و $x-22 \geq -2$

$|x-22| \leq 2$

2) الزاوية القائمة تتحول الى زاوية حادة أو منفرجة اذا تحرك مؤشر الزاوية الى اليمين أو الى اليسار في الاقل بدرجة واحدة .

الحل : نفرض الزاوية x ، قياس الزاوية القائمة 90

المتباينة المركبة تكون بالصورة :

$x < 90 + 1$ و $x > 90 - 1$

$x - 90 < 1$ و $x - 90 > -1 \Rightarrow |x - 90| < 1$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الاعداد :

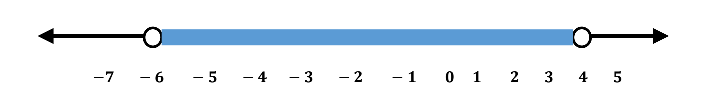
3) $|x + 1| < 5$

الحل :

$-5 < x + 1 < 5 \Rightarrow -5 - 1 < x < 5 - 1$

$-6 < x < 4$

$S = \{x : -6 < x < 4\}$



❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

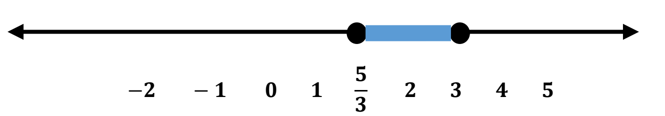
4) $|3z - 7| \le 2$

الحل :

$-2 \le 3z - 7 \le 2 \Rightarrow -2 + 7 \le 3z \le 2 + 7 \Rightarrow 5 \le 3z \le 9$

$\frac{5}{3} \le \frac{3z}{3} \le \frac{9}{3} \Rightarrow \frac{5}{3} \le z \le 3$

$S = \left\{z : \frac{5}{3} \le z \le 3\right\}$

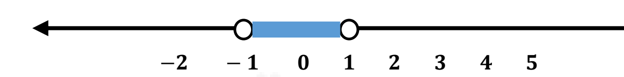


5) $|x| + 8 < 9$

الحل :

$|x| < 9 - 8 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

$S = \{x : -1 < x < 1\}$



❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

6) $|5y| - 2 \le 8$

الحل :

$|5y| \le 8 + 2 \Rightarrow |5y| \le 10 \Rightarrow -10 \le 5y \le 10$

$\frac{-10}{5} \le \frac{5y}{5} \le \frac{10}{5} \Rightarrow -2 \le y \le 2$



$S = \{y : -2 \le y \le 2\}$

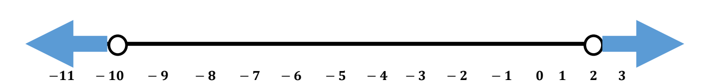
❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

7) $|x + 4| > 6$

الحل :



$x + 4 > 6$ أو $x + 4 < -6$



$x > 6 - 4$ أو $x < -6 - 4 \Rightarrow x > 2$ أو $x < -10$

$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x > 2\} \cup \{x : x < -10\}$

8) $|5z - 9| > 1$

الحل :

$5z - 9 > 1$ أو $5z - 9 < -1 \Rightarrow 5z > 1 + 9$ أو $5z < -1 + 9$

$5z > 10$ أو $5z < 8$

$\frac{5z}{5} > \frac{10}{5}$ أو $\frac{5z}{5} < \frac{8}{5}$

$z > 2$ أو $z < \frac{8}{5} \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{z : z > 2\} \cup \left\{z : z < \frac{8}{5}\right\}$

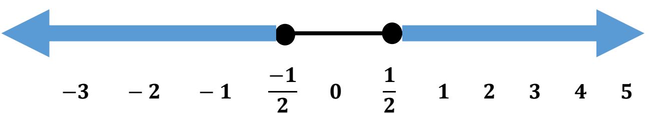
❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

9) $|2x| + 7 \geq 8$

الحل :

$|2x| \geq 8 - 7 \Rightarrow |2x| \geq 1$

$2x \geq 1$ أو $2x \leq -1$



$\frac{2x}{2} \geq \frac{1}{2}$ أو $\frac{2x}{2} \leq \frac{-1}{2}$

$x \geq \frac{1}{2}$ أو $x \leq \frac{-1}{2} \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \left\{x : x \geq \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{x : x \leq \frac{-1}{2}\right\}$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

10) $|4y| - 2 > 3$

الحل :

$|4y| > 3 + 2 \Rightarrow |4y| > 5$

$4y > 5$ أو $4y < -5$

$\frac{4y}{4} > \frac{5}{4}$ أو $\frac{4y}{4} < \frac{-5}{4}$

$y > \frac{5}{4}$ أو $y < \frac{-5}{4}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{y : y > \frac{5}{4}\right\} \cup \left\{y : y < \frac{-5}{4}\right\}$

11) $|5 - x| < 10$

الحل :

$-10 < 5 - x < 10 \Rightarrow -10 - 5 < -x < 10 - 5$

$-15 < -x < 5\,] \times -1$

$15 > x > -5 \Rightarrow -5 < x < 15$

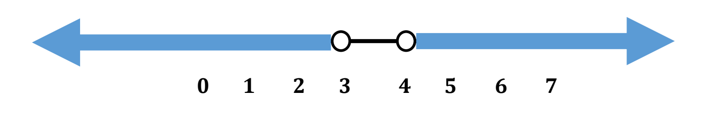
$S = \{x : -5 < x < 15\}$

$12)\ |4z-14|>2$

الحل :

$4z-14>2$ أو $4z-14<-2 \Rightarrow 4z>2+14$ أو $4z<-2+14$

$4z>16$ أو $4z<12$



$\frac{4z}{4}>\frac{16}{4}$ أو $\frac{4z}{4}<\frac{12}{4}$

$z>4$ أو $z<3 \Rightarrow S=S_1\cup S_2=\{z: z>4\}\cup\{z: z<3\}$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

$13)\ \left|\frac{x-12}{4}\right|\le 9$

الحل :

$-9\le\frac{x-12}{4}\le 9\,]\times 4 \Rightarrow -9\times 4\le\frac{x-12}{4}\times 4\le 9\times 4$

$-36\le x-12\le 36$

$-36+12\le x\le 36+12$

−25 −24 −23 −22 −21 0 47 48 49

$-24\le x\le 48 \Rightarrow S=\{x: -24\le x\le 48\}$

$14)\ \left|\frac{6-2y}{4}\right|\ge 9$

الحل :

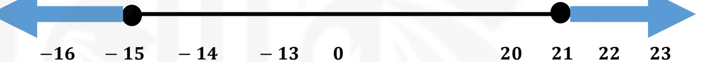
$\frac{6-2y}{4}\ge 9$ أو $\frac{6-2y}{4}\le -9\ \ ]\times 4$

$\frac{6-2y}{4}\times 4\ge 9\times 4$ أو $\frac{6-2y}{4}\times 4\le -9\times 4$

$6-2y\ge 36$ أو $6-2y\le -36$

$-2y\ge 36-6$ أو $-2y\le -36-6$

$-2y\ge 30$ أو $-2y\le -42$



$\frac{-2y}{-2}\le\frac{30}{-2}$ أو $\frac{-2y}{-2}\ge\frac{-42}{-2} \Rightarrow y\le -15$ أو $y\ge 21$

$S=S_1\cup S_2=\{y: y\le -15\}\cup\{y: y\ge 21\}$

تدرب وحل التمرينات

أكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المسائل الآتية :

15) يجب أن تبقى درجة الحرارة داخل الثلاجة $8°$ سيليزية بزيادة أو نقصان لا يتجاوز $0.5°$ سيليزية . أكتب مدى درجة الحرارة المثالية في داخل الثلاجة .

الحل : نفرض درجة الحرارة المثالية x

$x \le 8 + 0.5$ و $x \ge 8 - 0.5$

$x - 8 \le 0.5$ و $x - 8 \ge -0.5 \Rightarrow -0.5 \le x - 8 \le 0.5$

$|x - 8| \le 0.5$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

16) درجة غليان الماء $100°$ سيليزية عند مستو سطح البحر وتزداد وتنقص في المناطق الجبلية والوديان بما لا يتجاوز $20°$ سيليزية ، أكتب مدى التذبذب في درجة غليان الماء .

الحل : نفرض درجة غليان الماء x

$x \le 100 + 20$ أو $x \ge 100 - 20$

$x - 100 \le 20$ أو $x - 100 \ge -20$

$-20 \le x - 100 \le 20$

$|x - 100| \le 20$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

حل متباينات القيمة المطلقة الآتية :

17) $|x + 3| < 6$

الحل :

$-6 < x + 3 < 6 \Rightarrow -6 - 3 < x < 6 - 3$

$-9 < x < 3 \Rightarrow S = \{x : -9 < x < 3\}$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

18) $|x| - 6 < 5$

الحل :

$|x| < 5 + 6 \Rightarrow |x| < 11$

$-11 < x < 11 \Rightarrow S = \{x : -11 < x < 11\}$

19) $|2z| - 5 < 2$

الحل :

$|2z| < 2 + 5 \Rightarrow |2z| < 7 \Rightarrow -7 < 2z < 7$

$\frac{-7}{2} < \frac{2z}{2} < \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{-7}{2} < z < \frac{7}{2} \Rightarrow S = \left\{z : \frac{-7}{2} < z < \frac{7}{2}\right\}$

$20)\ |y-3| \geq \frac{1}{3}$

الحل :

$y-3 \geq \frac{1}{3}$ أو $y-3 \leq -\frac{1}{3}] \times 3$

$3(y-3) \geq \frac{1}{3} \times 3$ أو $3(y-3) \leq -\frac{1}{3} \times 3$

$3y-9 \geq 1$ أو $3y-9 \leq -1$

$3y \geq 1+9$ أو $3y \leq -1+9$

$3y \geq 10$ أو $3y \leq 8$

$\frac{3y}{3} \geq \frac{10}{3}$ أو $\frac{3y}{3} \leq \frac{8}{3} \Rightarrow y \geq \frac{10}{3}$ أو $y \leq \frac{8}{3}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{y : y \geq \frac{10}{3}\right\} \cup \left\{y :\ y \leq \frac{8}{3}\right\}$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

$21)\ 2|x| - 7 \geq 1$

الحل :

$2|x| - 7 \geq 1 \Rightarrow\ 2|x| \geq 1+7 \Rightarrow\ 2|x| \geq 8] \div 2$

$|x| \geq 4\ \Rightarrow x \geq 4$ أو $x \leq -4$

$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x \geq 4\} \cup \{x : x \leq -4\}$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

$22)\ |9y| - 6 > 3$

الحل :

$|9y| - 6 > 3\ \Rightarrow |9y| > 3+6 \Rightarrow |9y| > 9$

$9y > 9$ أو $9y < -9\ \Rightarrow \frac{9y}{9} > \frac{9}{9}$ أو $\frac{9y}{9} < \frac{-9}{9}$

$y > 1$ أو $y < -1$

$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y > 1\} \cup \{y : y < -1\}$

$23)\ |11z| - 2 \geq 9$ واجب

$24)\ |1-x| < 1$

الحل :

$-1 < 1-x < 1 \Rightarrow -1-1 < -x < 1-1\ \Rightarrow\ -2 < -x < 0\ ] \times -1$

$2 > x > 0\ \Rightarrow\ 0 < x < 2$

$S = \{x : 0 < x < 2\}$



25) $\left|\frac{4}{5}z-1\right|>\frac{4}{5}$

الحل :

$\frac{4}{5}z-1>\frac{4}{5}$ أو $\frac{4}{5}z-1<-\frac{4}{5}]\times 5$

$\frac{4}{5}z\times 5-1\times 5>\frac{4}{5}\times 5$ أو $\frac{4}{5}z\times 5-1\times 5<-\frac{4}{5}\times 5$

$4z-5>4$ أو $4z-5<-4 \Rightarrow 4z>4+5$ أو $4z<-4+5$

$4z>9$ أو $4z<1 \Rightarrow \frac{4z}{4}>\frac{9}{4}$ أو $\frac{4z}{4}<\frac{1}{4} \Rightarrow z>\frac{9}{4}$ أو $z<\frac{1}{4}$

$S=S_1\cup S_2=\left\{z:\ z>\frac{9}{4}\right\}\cup\left\{z:\ z<\frac{1}{4}\right\}$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

26) $\left|\frac{z-1}{7}\right|\le 2$

الحل :

$-2\le\frac{z-1}{7}\le 2\ ]\times 7$

$-2\times 7\le\frac{z-1}{7}\times 7\le 2\times 7$

$-14\le z-1\le 14 \Rightarrow -14+1\le z\le 14+1$

$-13\le z\le 15 \Rightarrow S=\{z:\ -13\le z\le 15\}$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

أكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة لكل من التمثيلات البيانية الآتية :

27)

−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3

الحل : الرسم البياني يمثل تقاطع والفجوة فارغة

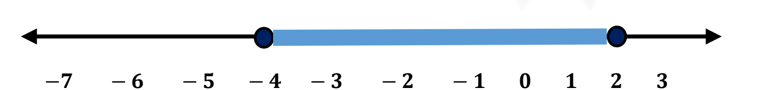
$-6<x<2$ المتباينة

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{-6+2}{2}=\frac{-4}{2}=-2$ ثم نطرح (-2) من جميع المتباينة :

$-6<x<2 \Rightarrow -6-(-2)<x-(-2)<2-(-2)$

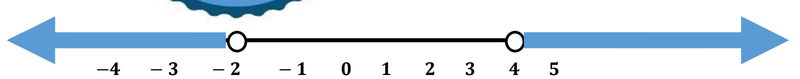
$-4<x+2<4 \Rightarrow |x+2|<4$

28) واجب



−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3

29)



الحل : الرسم البياني يمثل اتحاد (أو)

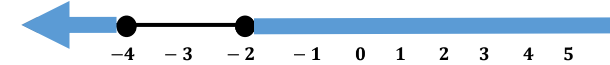
$x > -2$ أو $x < 4$

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$ ثم نطرح (1) من جميع المتباينة :

$x > -2$ أو $x < 4 \Rightarrow x - 1 > -2 - 1$ أو $x - 1 < 4 - 1$

$x - 1 > -3$ أو $x - 1 < 3 \Rightarrow |x - 1| > 3$

30) واجب



تدرب وحل مسائل حياتية : أكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل كل مسألة مما يأتي :



31) الغرير : حيوان الغرير هو أحد أنواع الثديات ينتمي الى شعبة الحبليات ويمتلك قوائم قصيرة نوعا ما ويعيش في الحفر التي يحفرها في الارض طول جسمه من الرأس الى الذيل يصل ما بين $68\ cm$, $76\ cm$. أكتب مدى طول الغرير .

الحل : نفرض طول الغرير x

$68 < x < 76$ المتباينة

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{68+76}{2} = \frac{144}{2} = 72$ ثم نطرح (72) من جميع المتباينة :

$68 < x < 76 \Rightarrow 68 - 72 < x - 72 < 76 - 72$

$-4 < x - 72 < 4 \Rightarrow |x - 72| < 4$



32) صحة : معدل النبض (عدد دقات القلب) الطبيعي للانسان البالغ يتراوح بين 60 الى 90 نبضة في الدقيقة. أكتب مدى عدد دقات القلب غير الطبيعية لقلب الانسان .

الحل : نفرض عدد دقات القلب غير الطبيعية x

$x < 60$ أو $x > 90$ المتباينة

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{60+90}{2} = \frac{150}{2} = 75$ ثم نطرح (75) من جميع المتباينة :

$x < 60$ أو $x > 90 \Rightarrow x - 75 < 60 - 75$ أو $x - 75 > 90 - 75$

$x - 75 < -15$ أو $x - 75 > 15 \Rightarrow |x - 75| > 15$



33) مواصلات : تطير الطائرات المدنية على ارتفاع يتراوح ما بين $8\ km$ الى $10\ km$ اذ تعد منطقة جوية معتدلة . أكتب مدى منطقة الطيران المدنية .

الحل : نفرض مدى منطقة الطيران x

معدل المدى للطيران : $\frac{10+8}{2} = \frac{18}{2} = 9$

$$8 < x < 10 \Rightarrow 8 - 9 < x - 9 < 10 - 9$$

$$-1 < x - 9 < 1 \ \Rightarrow |x - 9| < 1$$

فكر

34) تحد : حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الاعداد :

1) $\left|\frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}}\right| \leq \sqrt{6}$

الحل :

$$-\sqrt{6} \leq \frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{6}$$

$$-\sqrt{6} \times \sqrt{2} \leq \frac{\sqrt{2}[\sqrt{3}(x+1)]}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{6} \times \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{12} \leq \sqrt{3}(x+1) \leq \sqrt{12}$$

$$-\sqrt{12} \leq \sqrt{3}x + \sqrt{3} \leq \sqrt{12}$$

$$-2\sqrt{3} - \sqrt{3} \leq \sqrt{3}x \leq 2\sqrt{3} - \sqrt{3}$$

$$-3\sqrt{3} \leq \sqrt{3}x \leq \sqrt{3}$$

$$\frac{-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \leq \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{3}} \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$-3 \leq x \leq 1 \ \Rightarrow \ S = \{x : -3 \leq x \leq 1\}$$

$-7 \quad -6 \quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$

2) $\left|\frac{\sqrt{12} - \sqrt{3}y}{\sqrt{5}}\right| \geq \sqrt{15}$

الحل :

$\frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}y}{\sqrt{5}} \geq \sqrt{15}$ أو $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}y}{\sqrt{5}} \leq -\sqrt{15}\ ] \times \sqrt{5}$

$\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}y}{\sqrt{5}} \geq \sqrt{15} \times \sqrt{5}$ أو $\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}y}{\sqrt{5}} \leq -\sqrt{15} \times \sqrt{5}$



$\sqrt{12}-\sqrt{3}y \geq \sqrt{75}$ أو $\sqrt{12}-\sqrt{3}y \leq -\sqrt{75}$

$2\sqrt{3}-\sqrt{3}y \geq 5\sqrt{3}$ أو $2\sqrt{3}-\sqrt{3}y \leq -5\sqrt{3}$

$-\sqrt{3}y \geq 5\sqrt{3}-2\sqrt{3}$ أو $-\sqrt{3}y \leq -5\sqrt{3}-2\sqrt{3}$

$-\sqrt{3}y \geq 3\sqrt{3}$ أو $-\sqrt{3}y \leq -7\sqrt{3}\,] \div -\sqrt{3}$

$\frac{-\sqrt{3}y}{-\sqrt{3}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}$ أو $\frac{-\sqrt{3}y}{-\sqrt{3}} \geq \frac{-7\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}$

$y \leq -3$ أو $y \geq 7$

$S=\{y: y \leq -3\} \cup \{y: y \geq 7\}$

35) أصحح الخطأ : قالت خلود أن متباينة القيمة المطلقة $|6-3y| \geq 7$ تمثل متباينة مركبة بعلاقة (و) ومجموعة الحل لها : $\{y : \frac{-1}{3} \leq y \leq \frac{13}{2}\}$ بين خطأ خلود وصححه .

الحل : المتباينة تمثل متباينة مركبة بعلاقة (أو)

$|6-3y| \geq 7$

$6-3y \geq 7$ أو $6-3y \leq -7 \Rightarrow -3y \geq 7-6$ أو $-3y \leq -7-6$

$-3y \geq 1$ أو $-3y \leq -13\,] \div -3$

$\frac{-3y}{-3} \leq \frac{1}{-3}$ أو $\frac{-3y}{-3} \geq \frac{-13}{-3} \Rightarrow y \leq \frac{1}{-3}$ أو $y \geq \frac{13}{3}$

$S=S_1 \cup S_2=\left\{y: y \leq \frac{1}{-3}\right\} \cup \left\{y: y \geq \frac{13}{3}\right\}$

36) حس عددي : أكتب مجموعة الحل لمتباينات القيمة المطلقة التالية في مجموعة الاعداد الحقيقية :

1) $|z|-1<0$

الحل :

$|z|<1 \Rightarrow -1<z<1 \Rightarrow S=\{z: -1<z<1\}$

2) $|x-1|>0$

الحل :

$x-1>0$ أو $x-1<0 \Rightarrow x>1$ أو $x<1$

$S=S_1 \cup S_2=\{x: x>1\} \cup \{x: x<1\}$

مراجعة الفصل

تدريب 1 : حل متباينة القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الاعداد : $|3y|-1\le 9$

الحل :

$$|3y|-1\le 9 \Rightarrow |3y|\le 9+1 \Rightarrow |3y|\le 10$$

$$-10\le 3y\le 10 \Rightarrow \frac{-10}{3}\le\frac{3y}{3}\le\frac{10}{3} \Rightarrow S=\left\{y:\frac{-10}{3}\le\frac{3y}{3}\le\frac{10}{3}\right\}$$

−6 −5 −4 $-\frac{10}{3}$ −3 −2 −1 0 1 2 3 $\frac{10}{3}$ 4 5

تدريب 2 : حل متباينة القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الاعداد : $\left|\frac{6-2x}{8}\right|\ge 3$

الحل :

$$\frac{6-2x}{8}\ge 3 \quad \text{أو} \quad \frac{6-2x}{8}\le -3 \;]\times 8$$

$$8\times\frac{6-2x}{8}\ge 3\times 8 \quad \text{أو} \quad 8\times\frac{6-2x}{8}\le -3\times 8$$

$$6-2x\ge 24 \quad \text{أو} \quad 6-2x\le -24 \Rightarrow -2x\ge 24-6 \quad \text{أو} \quad -2x\le -24-6$$

$$-2x\ge 18 \quad \text{أو} \quad -2x\le -30\;]\div -2$$

$$\frac{-2x}{-2}\le\frac{18}{-2} \quad \text{أو} \quad \frac{-2x}{-2}\ge\frac{-30}{-2} \Rightarrow x\le -9 \quad \text{أو} \quad x\ge 15$$

$$S=S_1\cup S_2=\{x: x\le -9\}\cup\{x: x\ge 15\}$$



اختبار الفصل

حل متباينات القيمة المطلقة الآتية :

24) $|x-6|\le 3$

الحل :

$$-3\le x-6\le 3 \Rightarrow -3+6\le x\le 3+6$$

$$3\le x\le 9 \Rightarrow S=\{x: 3\le x\le 9\}$$

25) $|3z|-5<4$

الحل :

$$|3z|<4+5 \Rightarrow |3z|<9$$

$-9 < 3z < 9 \Rightarrow \frac{-9}{3} < \frac{3z}{3} < \frac{9}{3} \Rightarrow -3 < z < 3$

$S = \{z : -3 < z < 3\}$

$26)\ |x+1| > \frac{1}{2}$

الحل :

$x + 1 > \frac{1}{2}$ أو $x + 1 < -\frac{1}{2} \Rightarrow x > \frac{1}{2} - 1$ أو $x < -\frac{1}{2} - 1$

$x > \frac{-1}{2}$ أو $x < -\frac{3}{2} \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \left\{x : x > \frac{-1}{2}\right\} \cup \left\{x : x < -\frac{3}{2}\right\}$

$27)\ 6|x| - 8 \geq 3$

الحل :

$6|x| \geq 3 + 8 \Rightarrow 6|x| \geq 11 \Rightarrow \frac{6|x|}{6} \geq \frac{11}{6} \Rightarrow |x| \geq \frac{11}{6}$

$x \geq \frac{11}{6}$ أو $x \leq -\frac{11}{6} \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \left\{x : x \geq \frac{11}{6}\right\} \cup \left\{x : x \leq -\frac{11}{6}\right\}$

$28)\ |3y| - 2 > 9$ واجب

$29)\ |8z| - 1 \geq 8$

الحل :

$|8z| \geq 8 + 1 \Rightarrow |8z| \geq 9 \Rightarrow 8z \geq 9$ أو $8z \leq -9$

$\frac{8z}{8} \geq \frac{9}{8}$ أو $\frac{8z}{8} \leq \frac{-9}{8} \Rightarrow z \geq \frac{9}{8}$ أو $z \leq \frac{-9}{8}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{z : z \geq \frac{9}{8}\right\} \cup \left\{z : z \leq \frac{-9}{8}\right\}$

$30)\ |4 - 3y| \geq 14$

الحل :

$4 - 3y \geq 14$ أو $4 - 3y \leq -14 \Rightarrow -3y \geq 14 - 4$ أو $-3y \leq -14 - 4$

$-3y \geq 10$ أو $-3y \leq -18\ ] \overset{\div -3}{\Longrightarrow} \frac{-3y}{-3} \leq \frac{10}{-3}$ أو $\frac{-3y}{-3} \geq \frac{-18}{-3}$

$y \leq \frac{-10}{3}$ أو $y \geq 6 \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \left\{y : y \leq \frac{-10}{3}\right\} \cup \{y : y \geq 6\}$

30) $\left|\frac{6-3y}{9}\right| \geq 5$

الحل :

$\frac{6-3y}{9} \geq 5$ أو $\frac{6-3y}{9} \leq -5 \,]\overset{\times 9}{\Rightarrow} \frac{6-3y}{9} \times 9 \geq 5 \times 9$ أو $\frac{6-3y}{9} \times 9 \leq -5 \times 9$

$6-3y \geq 45$ أو $6-3y \leq -45 \Rightarrow -3y \geq 45-6$ أو $-3y \leq -45-6$

$-3y \geq 39$ أو $-3y \leq -51 \,]\overset{\div -3}{\Longrightarrow} \frac{-3y}{-3} \leq \frac{39}{-3}$ أو $\frac{-3y}{-3} \geq \frac{-15}{-3}$

$y \leq -13$ أو $y \geq 17 \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \leq -13\} \cup \{y : y \geq 17\}$







الفصل الثاني

المقادير الجبرية



الفصل الثاني

المقادير الجبرية

ضرب المقادير الجبرية

فكرة الدرس : ضرب مقدار في مقدار جبري يمثل حالات خاصة .

المفردات :

- مربع مجموع حدين
- مربع فرق حدين
- مكعب مجموع
- مكعب فرق

ضرب مقدارين جبرين كل منهما من حدين

مثال : جد مساحة الممر المحيط بالحديقة المربعة الشكل اذا كان عرض الممر $2m$ وطول ضلع الحديقة h .

الحل : مساحة الممر هي الفرق بين مساحتي المربع الكبير (الحديقة مع الممر) والمربع الصغير (الحديقة)

مساحة الحديقة مع الممر $(h+2)(h+2) = h^2+2h+2h+4 = h^2+4h+4$

مساحة الحديقة $h \times h = h^2$

مساحة الممر $h^2+4h+4- h^2 = 4h+4$

مثال : جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين :

1) $(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2+xy+yx+y^2 = x^2+2xy+y^2$

2) $(x-y)^2$ بنفس الطريقة أعلاه

3) $(x+y)(x-y) = x^2-xy+yx-y^2 = x^2-y^2$

4) $(x+3)(x+5) = x^2+5x+3x+15 = x^2+8x+15$

5) $(x+2)(x-6) = x^2-6x+2x-12 = x^2-4x-12$

6) $(x-1)(x-4) = x^2-4x-x+4 = x^2-5x+4$

مثال : جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الاتية :

1) $(z+3)^2 = z^2+2\times z\times 3+(3)^2 = z^2+6z+9$

قانون المربع الكامل

$$\left(\text{الحد الثاني} \pm \text{الحد الاول}\right)^2 = \left(\text{الحد الاول}\right)^2 \underset{\text{اشارة الحدانية}}{\pm} 2\times \text{الحد الأول} \times \text{الحد الثاني} + \left(\text{الحد الثاني}\right)^2$$

2) $(h-5)^2 = h^2-2\times h\times 5+(5)^2 = h^2-10h+25$

3) $(2x-7)(2x+7) = 4x^2+14x-14x-49 = 4x^2-49$

4) $(v+\sqrt{2})(v-\sqrt{2}) = v^2-2$

5) $(n-\sqrt{3})(5n-\sqrt{3}) = 5n^2 - \sqrt{3}n - 5\sqrt{3}n + 3 = 5n^2 - 6\sqrt{3}n + 3$

ضرب مقدار جبري من حدين في آخر من ثلاثة حدود

مثال : جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود :

1) $(x+2)(x^2-2x+4) = x^3 - 2x^2 + 4x + 2x^2 - 4x + 8 = x^3 + 8$

2) $(y-3)(y^2+3y+9) = y^3 + 3y^2 + 9y - 3y^2 - 9y - 27 = y^3 - 27$

3) $(y+2)^3 = (y+2)(y+2)^2 = (y+2)(y^2+4y+4)$

$= y^3 + 4y^2 + 4y + 2y^2 + 8y + 8 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$

4) $(z-3)^3 = (z-3)(z-3)^2 = (z-3)(z^2-6z+9)$

$= z^3 - 6z^2 + 9z - 3z^2 + 18z - 27 = z^3 - 9z^2 + 27z - 27$

مثال : جد ناتج ضرب المقادير الجبرية :

1) $(2v+5)(4v^2-10v+25) = 8v^3 - 20v^2 + 50v + 20v^2 - 50v + 125$

$= 8v^3 + 125$

2) $\left(\frac{1}{3} - z\right)\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}z + z^2\right) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9}z + \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{9}z - \frac{1}{3}z^2 - z^3 = \frac{1}{27} - z^3$

3) $(x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}) = x^3 + \sqrt[3]{2}x^2 + \sqrt[3]{4}x - \sqrt[3]{2}x^2 - \sqrt[3]{4}x - \sqrt[3]{8}$

$= x^3 - 2$

4) $\left(\sqrt[3]{\frac{3}{5}} + v\right)\left(\sqrt[3]{\frac{9}{25}} - \sqrt[3]{\frac{3}{5}}v + v^2\right) = \sqrt[3]{\frac{27}{125}} - \sqrt[3]{\frac{9}{25}}v + \sqrt[3]{\frac{3}{5}}v^2 + \sqrt[3]{\frac{9}{25}}v - \sqrt[3]{\frac{3}{5}}v^2 + v^3$

$= \frac{3}{5} + v^3$

تأكد من فهمك

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين :

1) $(x+3)(x-3) = x^2 - 3x + 3x - 9 = x^2 - 9$

2) $(z+\sqrt{5})(z-\sqrt{5}) = z^2 - \sqrt{5}z + \sqrt{5}z - 5 = z^2 - 5$

3) $(\sqrt{7}-h)^2 = (\sqrt{7}-h)(\sqrt{7}-h) = 7 - \sqrt{7}z - \sqrt{7}z + h^2 = 7 - 2\sqrt{7}z + h^2$

4) $(v+5)(v+1) = v^2 + v + 5v + 5 = v^2 + 6v + 5$

5) $(x+3)(x-2)$ واجب

6) $(3x-4)(x+5)$ واجب

7) $\left(\frac{1}{3}y+3\right)\left(\frac{1}{3}y+2\right)=\frac{1}{9}y^2+\frac{2}{3}y+\frac{3}{3}y+6=\frac{1}{9}y^2+\frac{5}{3}y+6$

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود :

8) $(y+2)(y^2-2y+4)=y^3-2y^2+4y+2y^2-4y+8=y^3+8$

9) $(2z+4)(4z^2-8z+16)$ واجب

10) $(v-\sqrt[3]{3})(v^2+\sqrt[3]{3}v+\sqrt[3]{9})$ واجب

11) $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{7}}+m\right)\left(\sqrt[3]{\frac{4}{49}}-\sqrt[3]{\frac{2}{7}}m+m^2\right)=\sqrt[3]{\frac{8}{343}}-\sqrt[3]{\frac{4}{49}}m+\sqrt[3]{\frac{2}{7}}m^2+\sqrt[3]{\frac{4}{49}}m-\sqrt[3]{\frac{2}{7}}m^2+m^3$

$=\frac{2}{7}+m^3$

12) $(x+5)^3$ واجب

13) $(y-4)^3=(y-4)(y-4)^2=(y-4)(y^2-8y+16)$

$=y^3-8y^2+16y-4y^2+32y-64=y^3-12y^2+48y+64$

تدرب وحل التمرينات

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين :

14) $(n-6)^2=n^2-12n+36$ مربع حدانية

15) $(y+5)(y-5)$ واجب

16) $(x+\sqrt{8})^2=n^2+2\sqrt{8}x+8$ مربع حدانية

17) $(y+\sqrt{6})(y-\sqrt{6})=y^2-\sqrt{6}y+\sqrt{6}y-6=y^2-6$

18) $(8+h)(3+h)=24+8h+3h+h^2=24+11h+h^2$

19) $(4-y)(5-y)$ واجب

20) $(2x-3)(x+9)$ واجب

21) $(z-2\sqrt{7})(2z-\sqrt{7})=2z^2-\sqrt{7}z-4\sqrt{7}z+2(7)=2z^2-5\sqrt{7}z+14$

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود

22) $(x+6)(x^2-6x+36)=x^3-6x^2+36x+6x^2-36x+216=x^3+216$

23) $(y-1)(y^2+y+1)$ واجب

24) $(z-3)^3$ واجب

25) $\left(\frac{2}{3}-r\right)\left(\frac{4}{9}+\frac{2}{3}r+r^2\right)=\frac{8}{27}+\frac{4}{9}r+\frac{2}{3}r^2-\frac{4}{9}r-\frac{2}{3}r^2-r^3=\frac{8}{27}-r^3$

26) $(x-\sqrt[3]{4})(x^2+\sqrt[3]{4}x+\sqrt[3]{16})$ واجب

27) $(z-\sqrt{5})^3=(z-\sqrt{5})(z-\sqrt{5})^2=(z-\sqrt{5})(z^2-2\sqrt{5}z+5)$

$=z^3-2\sqrt{5}z^2+5z-\sqrt{5}z^2+10z-5\sqrt{5}=z^3-3\sqrt{5}z^2+15z-5\sqrt{5}$

28) $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{5}}+n\right)\left(\sqrt[3]{\frac{1}{25}}-\sqrt[3]{\frac{1}{5}}n+n^2\right)$ واجب

29) $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}+\frac{1}{h}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{1}{81}}-\sqrt[3]{\frac{1}{9}\frac{1}{h}}+\frac{1}{h^2}\right)$ واجب

تدرب وحل مسائل حياتية



30) مسبح : يعد فندق بغداد أحد الفنادق السياحية المهمة في العاصمة العراقية بغداد ، يبلغ طول المسبح فيه $(x+9)$ أمتار وعرضه $(x+1)$ متر ، ومحاط بممر عرضه 1 متر . أكتب مساحة المسبح مع الممر بأبسط صورة .

الحل : طول المسبح $(x+9)$ ، عرض المسبح $(x+1)$

طول المسبح مع الممر $x+9+1+1=x+11$

عرض المسبح مع الممر $x+1+1+1=x+3$

مساحة المسبح مع الممر = الطول × العرض

$A=(x+11)(x+3)=x^2+3x+11x+33=x^2+14x+33\ m^2$



31) تأريخ : تقع مدينة بابل شمال مدينة الحلة في العراق حيث عاش البابليون فيها منذ 3000 سنة قبل الميلاد تقريبا . وقد بنوا سنة 575 م بوابة عشتار التي تعد البوابة الثامنة في سور مدينة بابل . رسم وائل لوحة فنية تمثل بوابة عشتار بالابعاد $(y-7)$, $(y-4)$ سنتمترات أكتب مساحة اللوحة التي رسمها وائل بأبسط صورة .

الحل : المساحة = الطول × العرض

$A=(y-4)(y-7)=y^2-7y-4y+28=y^2-11y+28\ cm^2$



32) أسماك الزينة : حوض سمك زينة مكعب الشكل طول ضلعه $(v+3)$ سنتمتر . أكتب حجم حوض الزينة بأبسط صورة.

الحل : حجم الحوض (المكعب) = L^3

$V=(v+3)^3=(v+3)(v+3)^2=(v+3)(v^2+6v+9)$

$=v^3+6v^2+9v+3v^2+18v+27=v^3+9v^2+27v+27\ cm^3$

فكر

33) جد ناتج ما يأتي بأبسط صورة :

$(x+1)^2-(x-2)^2 = x^2+2x+1-(x^2-4x+4) = x^2+2x+1-x^2+4x-4$

$= 6x-3$

34) أصحح الخطأ : كتبت نسرين ناتج ضرب المقدارين الجبريين كالاتي :

$(\sqrt{5}h-4)(h-6) = 5h^2+10h-24$ حدد خطأ نسرين وصححه

$(\sqrt{5}h-4)(h-6) = \sqrt{5}h^2-6\sqrt{5}h-4h+24$ الخطأ في الحد الأول والحد الثاني

35) حس عددي : اي العددين أكبر ؟ العدد $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ أم العدد $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ وضح اجابتك .

$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 3-\sqrt{6}-\sqrt{6}+2 = 5-2\sqrt{6}$

$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 3+\sqrt{6}+\sqrt{6}+2 = 5+2\sqrt{6}$

$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 > (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

أكتب : ناتج ضرب المقدارين الجبريين :

$\left(2z+\frac{1}{2}\right)\left(2z-\frac{1}{2}\right) = 4z^2-z+z-\frac{1}{4} = 4z^2-\frac{1}{4}$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الاكبر

فكرة الدرس : تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر

المفردات :

- تحليل المقدار الجبري
- العامل المشترك الأكبر
- ثنائية الحد
- المعكوس

تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF)

مثال : نصف قطر قاعدة تمثال كهرمانة r متر ونصف قطر قاعدة التمثال مع الحوض $r+2$ متر ، جد مساحة الحوض .

الحل :

$A_1 = r^2\pi$

$A_2 = (r+2)^2\pi = (r^2+4r+4)\pi = r^2\pi+4r\pi+4\pi$

مساحة الحوض المحيط بالتمثال $A = A_2-A_1 = r^2\pi+4r\pi+4\pi-r^2\pi = 4r\pi+4\pi = 4\pi(r+1)$

مثال : حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل :

1) $6x^3+9x^2-18x = 3x(2x^2+3x-6)$

التحقق :

$3x(2x^2+3x-6) = 3x(2x^2)+3x(3x)-3x(6) = 6x^3+9x^2-18x$

$2)\ \sqrt{12}y^2z + 2\sqrt{3}yz^2 - 4\sqrt{3}yz$

$= 2\sqrt{3}y^2z + 2\sqrt{3}yz^2 - 4\sqrt{3}yz = 2\sqrt{3}\,yz(y + z - 2)$

التحقق :

$2\sqrt{3}\,yz(y + z - 2) = 2\sqrt{3}\,yz(y) + 2\sqrt{3}\,yz(z) - 2\sqrt{3}\,yz(2) = \sqrt{12}y^2z + 2\sqrt{3}yz^2 - 4\sqrt{3}yz$

مثال : حلل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر :

$1)\ 5x(x + 3) - 7(x + 3) = (x + 3)(5x - 7)$

$2)\ \frac{1}{2}(y - 1) + \frac{1}{3}y^2(y - 1) = (y - 1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}y^2\right)$

$3)\ \sqrt{3}v^2(z + 2) - \sqrt{5}(z + 2) = (z + 2)(\sqrt{3}v^2 - \sqrt{5})$

تحليل مقدار جبري باستعمال التجميع

مثال : حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع :

$1)\ 4x^3 - 8x^2 + 5x - 10 = (4x^3 - 8x^2) + (5x - 10) = 4x^2(x - 2) + 5(x - 2)$

$= (x - 2)(4x^2 + 5)$

التحقق :

$(x - 2)(4x^2 + 5) = 4x^3 + 5x - 8x^2 - 10 = 4x^3 - 8x^2 + 5x - 10$

$2)\ \sqrt{2}h^2t + \sqrt{3}t^2v - \sqrt{8}h^2v - \sqrt{12}v^2t$

$= (\sqrt{2}h^2t - \sqrt{8}h^2v) + (\sqrt{3}t^2v - \sqrt{12}v^2t) = (\sqrt{2}h^2t - 2\sqrt{2}h^2v) + (\sqrt{3}t^2v - 2\sqrt{3}v^2t)$

$= \sqrt{2}\,h^2(t - 2v) + \sqrt{3}tv(t - 2v) = (t - 2v)(\sqrt{2}h^2 + \sqrt{3}tv)$

مثال : حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع المعكوس :

$1)\ 14x^3 - 7x^2 + 3 - 6x = (14x^3 - 7x^2) + (3 - 6x) = 7x^2(2x - 1) + 3(1 - 2x)$

$= 7x^2(2x - 1) - 3(2x - 1) = (2x - 1)(7x^2 - 3)$

تأكد من فهمك : حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل

$1)\ 9x^2 - 21x = 3x(3x - 7)$

التحقق :

$3x(3x - 7) = 3x(3x) - 3x(7) = 9x^2 - 21x$

$2)\ 10 - 15y + 5y^2 = 5(2 - 3y + y^2)$

التحقق :

$5(2 - 3y + y^2) = 10 - 15y + 5y^2$

$3)\ 14z^4 - 21z^2 - 7z^3 = 7z^2(2z^2 - 3 - z)$

التحقق :

$4)\ \sqrt{8}t^2r + \sqrt{2}(tr^2 - \sqrt{3}\,tr) = 2\sqrt{2}t^2r + \sqrt{2}\,tr^2 - \sqrt{2}\sqrt{3}\,tr$

$= \sqrt{2}\,tr\left(2t + r - \sqrt{3}\right)$

حلل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك :

$5)\ 3y\,(y-4)-5\,(y-4)=(y-4)(3y-5)$

$6)\ \frac{1}{4}(t+5)+\frac{1}{3}t^2(t+5)=(t+5)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}t^2\right)$

$7)\ \sqrt{2}\,n(x+1)-\sqrt{3}\,m\,(x+1)$ واجب

$8)\ 2x\,(x^2-3)+7\,(x^2-3)$ واجب

حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل :

$9)\ 3y^3-6y^2+7y-14=(3y^3-6y^2)+(7y-14)=3y^2(y-2)+7(y-2)$

$(y-2)(3y^2+7)$

التحقق :

$(y-2)(3y^2+7)=\ y(3y^2)+7y-2(3y^2)-2(7)=3y^3+7y-6y^2-14$

$3y^3-6y^2+7y-14$ الترتيب

$10)\ 21-3x+35x^2-5x^3$ واجب

$11)\ 2r^2k+3k^2v-4r^2v-6v^2k=(2r^2k-4r^2v)+(3k^2v-6v^2k)$

$=2r^2(k-2v)+3kv(k-2v)=\ (k-2v)(2r^2+3kv)$

التحقق : نقوم بعملية التوزيع للاقواس

$(k-2v)(2r^2+3kv)=2kr^2+3k^2v-4vr^2-6kv^2$

$12)\ 3z^3-\sqrt{18}z^2-z-\sqrt{2}$ واجب معلومة $\boxed{\sqrt{18}=3\sqrt{2}}$

حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس :

$13)\ 21y^3-7y^2+3-9y=(21y^3-7y^2)+(3-9y)$

$=7y^2(3y-1)+3(1-3y)=\ 7y^2(3y-1)-3(3y-1)$

$=(3y-1)\,(7y^2+3)$

$14)\ \frac{1}{2}x^4-\frac{1}{4}x^3+5-10x=\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{4}x^3\right)+(5-10x)=\frac{1}{2}x^3\left(x-\frac{1}{2}\right)+10(\frac{1}{2}-x)$

$=\frac{1}{2}x^3\left(x-\frac{1}{2}\right)-10\left(x-\frac{1}{2}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x^3-10\right)$

$15)\ 6z^3-9z^2+12-8z$ واجب

$16)\ 5t^3-15t^2-2t+6=(5t^3-15t^2)-(2t-6)$ بعد التجميع مباشرة غيرنا اشارة الحد الأخير

$=5t^2(t-3)-2(t-3)=(t-3)(5t^2-2)$



تدرب وحل التمرينات : حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل

17) $12y^3 - 21y^2 = 3y^2(4y-7)$

التحقق :

$3y^2(4y-7) = 3y^2(4y) - 3y^2(7) = 12y^3 - 21y^2$

18) $5t^3 + 10t^2 - 15t$ واجب

19) $6v^2(3v-6) + 18v = 18v^3 - 36v^2 + 18v = 18v(v^2 - 2v + 1)$

التحقق :

$18v(v^2 - 2v + 1) = 18\,v\,(v^2) - 18\,v(2v) + 18\,v(1) = 18v^3 - 36v^2 + 18v$

20) $\sqrt{12}\,n^3r + \sqrt{3}(nr^3 - \sqrt{2}nr)$ $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ معلومة

$2\sqrt{3}\,n^3r + \sqrt{3}nr^3 - \sqrt{3}\sqrt{2}\,nr$ ونكمل الحل

حلل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك

21) $\frac{1}{7}(y+1) + \frac{1}{3}y^2(y+1)$ واجب

22) $\sqrt{3}\,k\,(x^2+1) - \sqrt{5}\,v\,(x^2+1)$ واجب

حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل :

23) $5x^3 - 10x^2 + 10x - 20$ واجب

24) $49 - 7z + 35z^2 - 5z^3 = (49 - 7z) + (35z^2 - 5z^3) = 7(7-z) + 5z^2(7-z)$
$= (7-z)(7+5z^2)$

التحقق واجب

25) $3t^3k + 9k^2s - 6t^3s - 18s^2k = (3t^3k - 6t^3s) + (9k^2s - 18s^2k)$

$= 3t^3(k-2s) + 9ks(k-2s) = (k-2s)(3t^3 + 9ks)$

التحقق : باستعمال خاصية التوزيع

$(k-2s)(3t^3 + 9ks) = 3t^3k + 9k^2s - 6t^3s - 18ks^2$

26) $2y^4 - \sqrt{12}y^3 + \sqrt{2}y - \sqrt{6}$ $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{6} = \sqrt{2}.\sqrt{3}$ معلومة للفائدة

27) $12x^3 - 4x^2 + 3 - 9x$ واجب

28) $4r^3 - 16r^2 - 3r + 12 = (4r^3 - 16r^2) - (3r - 12) = 4r^2(r-4) - 3(r-4)$
$= (r-4)(4r^2 - 3)$

تدرب وحل مسائل حياتية



29) الطاقة الشمسية : الألواح الشمسية هي المكون الرئيس في أنظمة الطاقة الشمسية التي تقوم بتوليد الكهرباء، وتصنع الخلايا من مواد شبه موصلة مثل السيليكون تمتص الضوء من الشمس . ما أبعاد اللوح الشمسي المستطيل الشكل اذا كانت مساحته $3x(x-4) - 22(x-4)$ أمتار مربعة ؟

الحل : نحلل المساحة الى قوسين حسب خاصية العامل المشترك في ثنائية الحد

$3x(x-4) - 22(x-4) = (x-4)(3x-22)$, $(x-4)(3x-22)$: أبعاد اللوح هي







30) طائرة الفلامنكو : طائر الفلامنكو ، من جنس النحاميات وهو من الطيور المهاجرة التي تمتاز بشكلها الجميل ولونها الوردي ، وتقطع مسافات بعيدة في أثناء موسم الهجرة السنوي مرورا بمنطقة الأهوار جنوبي العراق لتحصل على الغذاء من المسطحات المائية . اذا كانت مساحة المسطح المائي الذي غطته طيور الفلامنكو في أحد الأهوار $4y^2 + 14y + 7(2y + 7)$ أمتار مربعة . فما شكل المسطح وما أبعاده ؟

الحل :

$$4y^2 + 14y + 7(2y + 7) = 4y^2 + 14y + 14y + 49$$

$$= (4y^2 + 14y) + (14y + 49) = 2y(2y + 7) + 7(2y + 7) = (2y + 7)(2y + 7)$$

الهور مربع الشكل فإن طول الضلع = $(2y + 7)$ متر



31) ساعة بغداد : ساعة بغداد هي مبنى مرتفع تعلوه ساعة معلقة على برج لها اربعة أوجه ، يقع المبنى ضمن منطقة ساحة الاحتفالات في بغداد وأنشئت في سنة 1994 م . ما نصف قطر الدائرة الداخلية للساعة اذا علمت أن مساحتها $z^2\pi - 3z\pi - \pi(3z - 9)$ ؟

الحل :

مساحة الدائرة $= r^2\pi$

$$r^2\pi = z^2\pi - 3z\pi - \pi(3z - 9)$$

$$r^2\pi = z^2\pi - 3z\pi - 3z\pi + 9\pi$$

$$r^2\pi = z^2\pi - 6z\pi + 9\pi$$

$$r^2\pi = \pi(z^2 - 6z + 9)$$

$$r^2\pi = \pi(z - 3)^2 \quad \div \pi$$

$r^2 = (z - 3)^2$ بالجذر $\Rightarrow r = z - 3$

فكر

32) تحدٍّ : حلل المقدار الآتي الى أبسط صورة :

$$5x^5y + 7y^3z - 10x^5z - 14z^2y^2 = (5x^5y - 10x^5z) + (7y^3z - 14z^2y^2)$$

$$= 5x^5(y - 2z) + 7y^2z(y - 2z) = (y - 2z)(5x^5 + 7y^2z)$$

33) أصحح الخطأ : كتبت ابتسام ناتج تحليل المقدار التالي كما يأتي :

$$\sqrt{2}\,t^4 - \sqrt{24}t^3 + t^2 - \sqrt{12}t = (t + 2\sqrt{3})(\sqrt{2}t^2 - t)$$

أكتشف خطأ ابتسام وصححه .

الحل : الاشارات في القوسين هو الخطأ

$$\sqrt{2}\,t^4 - 2\sqrt{6}t^3 + t^2 - 2\sqrt{3}t = (\sqrt{2}\,t^4 - 2\sqrt{3}\,(\sqrt{2})t^3) + (t^2 - 2\sqrt{3}t)$$

الصحيح $= \sqrt{2}t^3(t-2\sqrt{3}) + t(t-2\sqrt{3}) = (t-2\sqrt{3})(\sqrt{2}t^3 + t)$

34) حس عددي : ما العدد المجهول في المقدار $x^2 + 3x + 5x + 15 = (x+3)(x+\boxed{5})$

أكتب : ناتج طرح المقدار $(x+y)(x-y)$ من المقدار $(x+y)(x+y)$ بابسط صورة

$$(x+y)(x+y) - (x+y)(x-y) = x^2 + xy + yx + y^2 - (x^2 - xy + yx - y^2)$$

$$= x^2 + xy + yx + y^2 - x^2 + xy - yx + y^2 = 2xy + 2y^2$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

تحليل المقدار الجبري بالمتطابقات

فكرة الدرس : تحليل المقدار الجبري كفرق بين مربعين ومربع كامل

المفردات :

- فرق بين مربعين
- المربع الكامل
- اكمال المربع
- الحد المفقود

تحليل المقدار الجبري بالفرق بين مربعين

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

اي تحليل الفرق بين مربعين يكون كالاتي :

(جذر الحد الأول + جذر الحد الثاني) (جذر الحد الأول - جذر الحد الثاني)

مثال : جد أبعاد ساحة كرة القدم التي مساحتها $x^2 - 400$ متر مربع .

الحل :

$$x^2 - 400 = (x+20)(x-20)$$

$\therefore$ الطول $x + 20$ ، العرض $x - 20$

مثال : حلل كل مقدار من المقادير التالية كفرق بين مربعين :

1) $x^2 - 400 = (x+3)(x-3)$

2) $36y^2 - z^2 = (6y+z)(6y-z)$

3) $49 - v^2 = (7+v)(7-v)$

4) $5h^2 - 7v^2 = (\sqrt{5}h + \sqrt{7}v)(\sqrt{5}h - \sqrt{7}v)$

5) $\frac{1}{16}z^4 - \frac{1}{81} = \left(\frac{1}{16}z^2 + \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{16}z^2 - \frac{1}{9}\right) = \left(\frac{1}{16}z^2 + \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{4}z + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}z - \frac{1}{3}\right)$

تحليل المقدار الجبري بالمربع الكامل

لتحليل المقدار بالمربع الكامل تكون الحدودية مؤلفة من ثلاثة حدود اي بالصورة $ax^2 \pm bx + c$ حيث أن :

ax^2 : الحد الأول ، bx : الحد الثاني (الوسط) ، c : الحد الثالث

$$bx = \pm 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$\text{الحد الوسط} = \pm 2\sqrt{(\text{الحد الأول})(\text{الحد الثالث})}$$

تحليل المربع الكامل كالآتي : (جذر الحد الأول ± جذر الحد الثالث) (جذر الحد الأول ± جذر الحد الثالث)

مثال : حلل كل مقدار من المقادير التالية على صورة مربع كامل :

1) $x^2 + 6x + 9 = (x+3)(x+3) = (x+3)^2$

2) $y^2 - 4y + 4 = (y-2)(y-2) = (y-2)^2$

3) $16z^2 - 8z + 1 = (4z-1)(4z-1) = (4z-1)^2$

مثال : حدد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعا كاملاً وحله :

1) $\underbrace{x^2}_{x} + 10x + \underbrace{25}_{5} = (x+5)(x+5) = (x+5)^2$

$2(x)(5) = 10\,x$

تمثل مربعا كاملاً $10x = 10x$

2) $\underbrace{4}_{2} - 37v + \underbrace{9v^2}_{3v}$

$2\,(2)(3v) = 12v$

لا تمثل مربعا كاملاً لأن $37v \neq 12v$

3) $\underbrace{9h^2}_{3h} - 6h + \underbrace{3}_{\sqrt{3}}$

$2\,(3h)\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

لا تمثل مربعا كاملاً لأن $2\sqrt{3}h \neq 6h$

4) $y^2 - 14y - 36$

لا تمثل مربع كاملاً لأن الحد الثالث اشارته سالبة .

مثال : أكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 \pm bx + c$ ليصبح مربعا كاملاً ثم حله :

1) $25x^2 - \cdots \ldots \ldots + 49$

الحل :

$$\text{الحد الوسط} = \pm 2\sqrt{(\text{الحد الأول})(\text{الحد الثالث})}$$

$$\text{الحد الوسط} = 2\sqrt{(25x^2)(49)} = 2\,(5x)(7) = 70\,x$$

$25x^2 - 70\,x + 49 = (5x-7)(5x-7) = (5x-7)^2$

2) $\ldots \ldots \ldots + 8x + 16$

الحل :

$$\text{الحد الاول} = \frac{(\text{الحد الوسط})^2}{4\,(\text{الحد الثالث})}$$

$$\text{الحد الاول} = \frac{(8x)^2}{4\,(16)} = \frac{64x^2}{64} = x^2$$

$$x^2 + 8x + 16 = (x+4)(x+4) = (x+4)^2$$

$3)\, y^2 + 14y + \cdots \ldots \ldots$

الحل :

$$\text{الحد الثالث} = \frac{(\text{الحد الوسط})^2}{4\,(\text{الحد الأول})}$$

$$\text{الحد الاول} = \frac{(14y)^2}{4\,(y^2)} = \frac{196y^2}{4\,y^2} = 49$$

$$y^2 + 14y + 49 = (y+7)(y+7) = (y+7)^2$$

تأكد من فهمك : حلل كل مقدار من المقادير التالية كفرق بين مربعين

1) $x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$

2) $36 - 4x^2$ واجب

3) $h^2 - v^2$ واجب

4) $9m^2 - 4n^2 = (3m+2n)(3m-2n)$

5) $27x^3z - 3xz^3 = 3xz(9x^2 - z^2) = 3xz(3x+z)(3x-z)$

6) $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\right)$

حلل كل مقدار من المقادير التالية كمربع كامل :

7) $y^2 - 8y + 16 = (y-4)(y-4) = (y-4)^2$

8) $y^2 - 8y + 16$ واجب

9) $v^2 + 2\sqrt{3}v + 3 = (v+\sqrt{3})(v+\sqrt{3}) = (v+\sqrt{3})^2$

10) $4h^2 - 20h + 25$ واجب

حدد اي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعا كاملاً وحلله :

11) $\underbrace{x^2}_{x} + 18x + \underbrace{81}_{9} = (x+9)(x+9) = (x+9)^2$

$2\,(x)(9) = 18x$

تمثل مربعا كاملاً لأن $18x = 18x$

12) $\underbrace{16}_{4} - 14v + \underbrace{v^2}_{v}$

$2(4)(v) = 8v$

لا تمثل مربعا كاملاً لأن $8v \neq 14v$

13) $64h^2 - 48h - 9$

لا تمثل مربعا كاملاً لأن الحد الثالث اشارته سالبة .

14) $3 - 4\sqrt{3}t + 4t^2$ واجب

أكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 \pm bx + c$ ليصبح مربعا كاملاً وحله :

15) $\ldots\ldots + 14y + 49$

$$\text{الحد الاول} = \frac{(\text{الحد الوسط})^2}{4\,(\text{الحد الثالث})}$$

$$\text{الحد الاول} = \frac{(14y)^2}{4\,(49)} = \frac{196y^2}{196} = y^2$$

$$y^2 + 14y + 49 = (y+7)(y+7) = (y+7)^2$$

16) $z^2 + 4z + \cdots\ldots$

$$\text{الحد الثالث} = \frac{(\text{الحد الوسط})^2}{4\,(\text{الحد الأول})}$$

$$\text{الحد الثالث} = \frac{(4z)^2}{4\,(z^2)} = \frac{16z^2}{4z^2} = 4$$

$$z^2 + 4z + 4 = (z+2)(z+2) = (z+2)^2$$

17) $3 - \cdots\ldots + 9x^2$

$$\text{الحد الوسط} = \pm 2\sqrt{(\text{الحد الأول})(\text{الحد الثالث})}$$

$$\text{الحد الوسط} = 2\sqrt{(3)(9x^2)} = 2\sqrt{3}(3x) = 6\sqrt{3}x$$

$$3 - 6\sqrt{3}x + 9x^2 = (\sqrt{3} - 3x)(\sqrt{3} - 3x) = (\sqrt{3} - 3x)^2$$

16) $4x^2 + 2\sqrt{5}x + \cdots\ldots$

$$\text{الحد الثالث} = \frac{(\text{الحد الوسط})^2}{4\,(\text{الحد الأول})}$$

$$\text{الحد الثالث} = \frac{(2\sqrt{5}x)^2}{4\,(4x^2)} = \frac{20x^2}{16x^2} = \frac{5}{4}$$

$$4x^2 + 2\sqrt{5}x + \frac{5}{4} = \left(2x + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(2x + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \left(2x + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

تدرب وحل التمرينات : حلل كل مقدار من المقادير الاتية الى ابسط صورة :

19) $25 - 4x^2$ واجب

20) $y^2 - 121 = (y+11)(y-11)$

21) $x^2 - 16z^2$ واجب

22) $12 - 3t^2 = 3(4 - t^2) = 3(2 + t)(2 - t)$

23) $8y^3x + 2x^3y$ واجب

24) $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}\left(y^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

25) $\frac{1}{3}z^5 - \frac{1}{12}z = \frac{1}{3}z\left(z^4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}z\left(z^2 + \frac{1}{2}\right)\left(z^2 - \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{3}z\left(z^2 + \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

26) $4x^2 + 20x + 25 = (2x + 5)(2x + 5) = (2x + 5)^2$

27) $3z^2 - 6z + 3 = 3(z^2 - 2z + 1) = 3(z - 1)(z - 1) = 3(z - 1)^2$

28) $16n^2 + 8\sqrt{3}n + 3$ واجب

29) $4t^3 - 12t^2 + 9t = t(4t^2 - 12t + 9) = t(2t - 3)(2t - 3) = t(2t - 3)^2$

30) $1 - 4m + 4m^2$ واجب

حدد اي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعا كاملاً وحلله :

31) $\underbrace{4x^2}_{2x} + 18x + \underbrace{16}_{4}$

$2(2x)(4) = 16x$

لا تمثل مربعا كاملاً لأن $18x \neq 16x$

32) $y^2 + 10y + 25$ واجب

33) $\underbrace{49}_{7} - 7v + \underbrace{v^2}_{v}$

$2(7)(v) = 14v$

لا تمثل مربعا كاملاً لأن $7v \neq 14v$

34) $2h^2 - 12h - 18$

لا تمثل مربعا كاملا لان الحد الثالث اشارته سالبة

35) $4v^2 + 4v + 4$ واجب

36) $\underbrace{3}_{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}z + \underbrace{z^2}_{z} = (\sqrt{3} - z)(\sqrt{3} - z) = (\sqrt{3} - z)^2$

$2(\sqrt{3})(z) = 2\sqrt{3}z$

لا تمثل مربعا كاملاً لأن $2\sqrt{3}z = 2\sqrt{3}z$

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 \pm bx + c$ ليصبح مربعا كاملاً وحلله :

$37)\ y^2 + \cdots \ldots\ldots +36$ واجب

$38)\ 25 - 20x + \cdots \ldots\ldots$ واجب

$39)\ 4v^2 + 8v + \cdots \ldots\ldots$

$$\text{الحد الثالث} = \frac{(\text{الحد الوسط})^2}{4\ (\text{الحد الأول})}$$

$$\text{الحد الثالث} = \frac{(8v)^2}{4\ (4v^2)} = \frac{64v^2}{16v^2} = 4$$

$$4v^2 + 8v + 4 = (2v+2)(2v+2) = (2v+2)^2$$

$40)\ 5 - \cdots \ldots\ldots +16x^2$

$$\text{الحد الوسط} = \pm 2\sqrt{(\text{الحد الأول})(\text{الحد الثالث})}$$

$$\text{الحد الوسط} = 2\sqrt{(5)(16x^2)} = 2\sqrt{5}(4x) = 8\sqrt{5}x$$

$$5 - 8\sqrt{5}x + 16x^2 = (\sqrt{5} - 4x)(\sqrt{5} - 4x) = (\sqrt{5} - 4x)^2$$

$41)\ 81 + 18z + \cdots \ldots\ldots$ واجب

$42)\ 9h^2 + 6\sqrt{2}h + \cdots \ldots\ldots$

$$\text{الحد الثالث} = \frac{(\text{الحد الوسط})^2}{4\ (\text{الحد الأول})}$$

$$\text{الحد الثالث} = \frac{(6\sqrt{2}h)^2}{4\ (9h^2)} = \frac{72h^2}{36h^2} = 2$$

$$9h^2 + 6\sqrt{2}h + 2 = (3h+\sqrt{2})(3h+\sqrt{2}) = (3h+\sqrt{2})^2$$

تدرب وحل مسائل حياتية



43) **المئذنة الملوية : وتقع منارة المئذنة الملوية في مدينة سامراء العراقية ، وتعد احدى معالم العراق المميزة بسبب شكلها الفريد ، فهي إحدى آثار العراق القديمة المشهورة التي تعود لعصر حكم الدولة العباسية، وترتكز على قاعدة مربعة مساحتها $x^2 - 8x + 16$ مترا مربعا . ما طول ضلع القاعدة التي تستند عليها الملوية بدلالة x ؟**

$$x^2 - 8x + 16 = (x-4)(x-4) = (x-4)^2$$

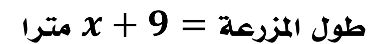


طول الضلع $= (x-4)$



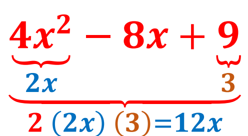
44) **مزرعة أبقار : لدى سعد مزرعة أبقار مربعة الشكل طول ضلعها x متر ، وسعها لتصبح مستطيلة الشكل فزاد في أحد الأضلاع وأنقص الضلع الآخر بعدد الامتار نفسها فأصبحت مساحة المزرعة $x^2 - 81$ مترا مربعا، ما طول المزرعة وعرضها بعد التوسعة بدلالة x ؟**

$$x^2 - 81 = (x+9)(x-9)$$


طول المزرعة $= x + 9$ مترا ، عرض المزرعة $= x - 9$ مترا


45) لوحة فنية : رسم بشار لوحة فنية تمثل منطقة الأهوار في جنوب العراق ، فكان المقدار $4x^2 - 8x + 9$ سنتمترات مربعة يمثل مساحة اللوحة الفنية .

أيمثل مقدار مساحة اللوحة الفنية مربعا كاملاً أم لا ؟


$$\underbrace{\underbrace{4x^2}_{2x} - 8x + \underbrace{9}_{3}}_{2\,(2x)\,(3)=12x}$$

مساحة اللوحة لا تمثل مربعا كاملاً .


فكر

46) تحدٍّ : حدد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعا كاملاً وحلله :

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}\right)^2$$

$$\underbrace{\underbrace{\frac{1}{9}x^2}_{\frac{1}{3}x} - \frac{1}{6}x + \underbrace{\frac{1}{16}}_{\frac{1}{4}}}_{2\left(\frac{1}{3}x\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{12}x=\frac{1}{6}x}$$

تمثل مربعا كاملاً لأن $\frac{1}{6}x = \frac{1}{6}x$

47) أصحح الخطأ : قالت منتهى إن المقدار $(2x+1)(2x-1)$ هو تحليل للمربع الكامل $4x^2 - 4x + 1$

حدد خطأ منتهى وصححه .

الخطأ في اشارة القوس الأول يجب أن تكون سالبة

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)(2x-1) = (2x-1)^2$$

48) حس عددي : أيمثل المقدار $9x^2 + 12x - 4$ مربعا كاملاً أم لا ؟ وضح اجابتك .

لا يمثل مربعا كاملاً لأن الحد الثالث اشارته سالبة .

أكتب : تحليل للمقدار $4x^2 - 8x + 4$

$$4x^2 - 8x + 4 = (2x-2)(2x-2)$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة

فكرة الدرس : تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود باستعمال التجربة

المفردات :

❖ الوسطان ❖ الحد الأوسط ❖ الطرفان



١) تحليل المقدار الجبري x^2+bx+c

لتحليل مقدار جبري مكون من ثلاثة حدود بقوم بالاتي :

- نفتح قوسين لإجراء عملية التحليل .
- نقوم بتحليل الحدين (الأول والثالث)
- اشارات الاقواس : تكون اشارة القوس الأول هي نفس اشارة الحد الثاني في الحدودية واشارة القوس الثاني هي حاصل ضرب اشارة الحد الثاني في اشارة الحد الثالث .
- ناتج ضرب الاوساط والاطراف للقوسين ومن ثم جمعهما أو طرحهما يعطي لدينا الحد الأوسط للحدودية مع مراعاة الاشارات بالنسبة لعملية ضرب الاوساط والاطراف .

مثال : ما أبعاد اللوحة الفنية للثور المجنح التي مساحتها $x^2+10x+21$ سنتمترا مربعا ؟

$$x^2+10x+21=(x+7)(x+3)$$

الوسطين $7x$ ، الطرفين $3x$

الحد الوسط $10\,x$

عرض اللوحة الفنية هو $x+3$

طول اللوحة الفنية هو $x+7$

مثال : حلل المقدار الجبري y^2+y-12

$$y^2+y-12=(y+4)(y-3)$$

الوسطين $4y$ ، الطرفين $-3y$

الحد الوسط y

مثال : حلل المقادير الجبرية الاتية الى أبسط صورة :

$$1)\ z^2-z-6=(z-3)(z+2)$$

الوسطين $-3z$ ، الطرفين $2z$

الحد الوسط $-z$

$2)\ x^2-9x+18=(x-3)(x-6)$

$3)\ y^2+6y-27=(y+9)(y-3)$

$4)\ x^2-xy-20y^2=(x-5y)(x-4y)$

$5)\ 15-8z+z^2=(5-z)(3-z)$

٢) تحليل المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$ وإن $a \neq 0$

مثال : حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الاتية الى أبسط صورة :

1) $6x^2 + 17x + 7 = (2x + 1)(3x + 7)$

الوسطين $3x$

الطرفين $14x$

الحد الوسط $17x$

2) $7y^2 - 26y - 8 = (y - 4)(7y + 2)$

الوسطين $-28y$

الطرفين $2y$

الحد الوسط $-26y$

مثال : حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الاتية الى أبسط صورة :

1) $3z^2 - 17z + 10 = (3z - 2)(z - 5)$

2) $4v^2 - v - 3 = (4v + 3)(v - 1)$

3) $15 + 11h + 2h^2 = (5 + 2h)(3 + h)$

4) $6x^2 - 51x + 63 = (6x - 9)(x - 7)$

5) $3x^2 - 10xy + 3y^2 = (3x - y)(x - 3y)$

تأكد من فهمك : حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى ابسط صورة :

1) $x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$

2) $1 - 2z + z^2 = (1 - z)(1 - z)$

3) $x^2 - 13x + 12 = (x - 12)(x - 1)$

4) $3 + 2z - z^2 = (1 + z)(3 - z)$

5) $x^2 - 2x - 3$ واجب

6) $15 - 8z + z^2$ واجب

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى ابسط صورة :

7) $2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$

8) $3y^2 - 14y + 8 = (3y - 2)(y - 4)$

9) $3x^2 - 10x + 8$ واجب



10) $8-25z+3z^2=(8-z)(1-3z)$

11) $5y^2-y-6$ واجب

12) $6+29z-5z^2=(6+z)(1-5z)$

13) $x^2-9xy+20y^2$ واجب

14) $3y^2-19yx-14x^2$ واجب

ضع الاشارات بين الحدود في الاقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحا :

15) $x^2+9x+20=(x+4)(x+5)$

16) $y^2-12y+20=(y-2)(y-10)$

17) $6x^2-7x+2=(2x-1)(3x-2)$

18) $20-7y-3y^2=(5-3y)(4+y)$

تدرب وحل التمرينات : حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى ابسط صورة :

19) $x^2+9x+14=(x+7)(x+2)$

20) $y^2-5y+6=(y-3)(y-2)$

21) $24-2z-z^2=(4-z)(6+z)$

22) $3+2z-z^2=(3+z)(1-z)$

23) $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$

24) $36-15z+z^2=(12-z)(3-z)$

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى ابسط صورة :

25) $2x^2+12x-14=(x+7)(2x-2)$

26) $4y^2-6y+2=(2y-2)(2y-1)$

27) $10+9z-9z^2=(2+3z)(5-3z)$

28) $2x^2+3x+1$ واجب

29) $13x^2-11y-2$ واجب

30) $50-20z+2z^2$ واجب

31) $30x^2-xy-y^2=(5x-y)(5x+y)$

32) $16y^2-2yx-3x^2=(2y-x)(8y+3)$

33) $6z^2-2zx-4x^2$ واجب

ضع الاشارات بين الحدود في الاقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحا :

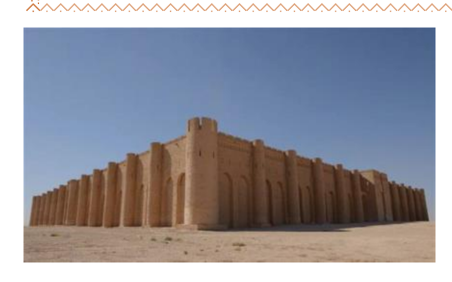
34) $x^2 + x - 20 = (x - 4)(x + 5)$

35) $x^2 - x - 56 = (x + 7)(x - 8)$

36) $35 + 3y - 2y^2 = (5 - y)(7 + 2y)$

37) $3x^2 - 5x + 2 = (x - 1)(3x - 2)$

تدرب وحل مسائل حياتية



38) قلعة الاخيضر : قلعة الاخيضر هي قلعة أثرية تقع في محافظة كربلاء وسط العراق ولا تزال أطلال القلعة قائمة الى يومنا هذا ، الأخيضر من الحصون الدفاعية الفريدة من نوعها ويحيط به سور عظيم مستطيل الشكل . ما أبعاد هذا السور الذي يحيط بالقلعة التي مساحتها $6x^2 - 39x + 60$ مترا مربعا ؟

الحل :

$6x^2 - 39x + 60 = (6x - 15)(x - 4)$

طول السور $= (6x - 15)$ عرض السور $= (x - 4)$



39) ألعاب ترفيهية : تعد أرجوحة ديسكفري من الألعاب الخطرة في مدينة الالعاب ، ويمثل المقدار $5t^2 + 5t - 30$ مسار أرجوحة ديسكفري في مدينة الالعاب ، اذ t يمثل زمن الحركة . وتحليل المقدار يساعد على معرفة الوقت الذي تستغرقه أرجوحتها في المرة الأولى حلل المقدار .

الحل :

$5t^2 + 5t - 30 = (t + 3)(5t - 10)$



40) مترو الأنفاق : يعد مترو الأنفاق نظام سكك حديد تحت الأرض تسير عليه القطارات ، وهو أحد وسائل النقل السريعة في المدن الكبيرة وذات الكثافة السكانية العالية ، ويتألف كل قطار من عدة عربات ، فاذا كان المقدار $14y^2 - 23y + 3$ يمثل مساحة أرضية العربة بالمتر المربع ، فما أبعادها ؟

الحل :

$14y^2 - 23y + 3 = (2y - 3)(7y - 1)$ أبعاد العربة

فكر

41) حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى أبسط صورة :

$4x^3 + 4x^2 - 9x - 9 = (4x^3 + 4x^2) - (9x + 9) = 4x^2(x + 1) - 9(x + 1)$

$= (x + 1)(4x^2 - 1)$

42) أصحح الخطأ : حلل سعد المقدار $6z^2 - 16z - 6$ كما يأتي :

$6z^2 - 16z - 6 = (3z - 1)(2z + 6)$

أكتشف خطأ سعد وصححه .

الحل : الخطأ في اشارة ناتج الحد الوسط

قمنا بتغير اشارة الاقواس $6z^2 - 16z - 6 = (3z + 1)(2z - 6)$

43) حس عددي : أيمكن تحديد ماذا اذا كانت اشارات القوسين في تحليل المقدار $x^2 - 12x + 35$ مختلفة أم متشابهة ومن دون تحليل المقدار ؟ وضح اجابتك

الحل : اذا كانت اشارة الحد الثاني سالبة والحد الثالث موجبة تكون اشارات القوسين متشابهة اي $(-)(-)$ وكذلك في حالة اشارة الحد الثاني موجبة والحد الثالث موجبة تكون كذلك اشارات القوسين متشابهة اي $(+)(+)$.

اكتب : الاشارات بين الحدود في الاقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحا :

$$6z^2 + 5z - 56 = (3z - 8)(2z + 7)$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين أو الفرق بين مكعبين

فكرة الدرس : تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود الذي على صورة مجموع (فرق بين) مكعبين .

المفردات :

- مجموع مكعبين
- فرق بين مكعبين

تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

(الجذر التكعيبي للحد الأول + الجذر التكعيبي للحد الثاني) $($الحد الأول$)^2$ − الحد الأول × الحد الثاني + $($الحد الثاني$)^2$)

مثال : ما مجموع حجمي مكعبي روبك الأول طول ضلعه $3\ dcm$ والثاني طول ضلعه $4dcm$ ؟

حجم المكعب = $($طول الضلع$)^3$

$$v_1 + v_2 = 3^3 + 4^3$$
$$= (3 + 4)(3^2 - 12 + 4^2) = (3 + 4)(9 - 12 + 16) = (7)(13) = 91\ dcm^3$$

مثال : حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى أبسط صورة :

1) $x^3 + 5^3 = (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$

2) $y^3 + 8 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$

3) $8z^3 + 27 = (2z + 3)(4z^2 - 6z + 9)$

4) $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{64} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{4a} + \frac{1}{16}\right)$

5) $\frac{27}{x^3} + \frac{8}{125} = \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{5}\right)\left(\frac{9}{x^2} - \frac{6}{5x} + \frac{4}{25}\right)$

6) $\frac{1}{2}t^3 + 4 = \frac{1}{2}(t^3 + 8) = \frac{1}{2}(t + 2)(t^2 - 2t + 4)$

7) $0.125 + v^3 = (0.5 + v)(0.25 - 0.5v + v^2)$

8) $0.064\, x^3 + 0.027y^3 = (0.4x + 0.3y)(0.16x^2 - 0.12xy + 0.9y^2)$

تحليل المقدار الجبري فرق بين مكعبين

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$

(الجذر التكعيبي للحد الأول − الجذر التكعيبي للحد الثاني) $(\text{الحد الأول})^2$ + الحد الأول × الحد الثاني + $(\text{الحد الثاني})^2$)

مثال : حوض مكعب الشكل طول ضلعه $1\,m$ مملوء بالماء أفرغ الماء منه في حوض آخر أكبر منه مكعب الشكل طول ضلعه $1.1\,m$. ما كمية الماء الاضافية التي نحتاج اليها ليمتلئ الحوض الكبير ؟

كمية الماء الاضافية اللازمة = حجم المكعب الكبير − حجم المكعب الصغير

$$v_2 - v_1 = (1.1)^3 - (1)^3$$
$$= (1.1-1)((1.1)^2 + 1.1\times 1 + (1)^2) = (0.1)(1.21+1.1+1)$$
$$= (0.1)(3.31) = 0.331\,m^3$$

مثال : حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى أبسط صورة :

1) $x^3 - 3^3 = (x-3)(x^2+3x+9)$

2) $y^3 - 64 = (y-4)(y^2+4y+16)$

3) $27z^3 - 8 = (3z-2)(9z^2+6z+4)$

4) $\frac{1}{b^3} - \frac{1}{125} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{5b} + \frac{1}{25}\right)$

5) $\frac{8}{y^3} - \frac{27}{125} = \left(\frac{2}{y} - \frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{y^2} + \frac{6}{5y} + \frac{9}{25}\right)$

6) $\frac{1}{3}t^3 - 9 = \frac{1}{3}(t^3 - 27) = \frac{1}{3}(t-3)(t^2+3t+9)$

7) $0.027x^3 - 0.008z^3 = (0.3x - 0.2z)(0.09x^2 + 0.06xz + 0.04z^2)$

8) $0.216 - n^3 = (0.6-n)(0.36+0.6n+n^2)$

9) $32 - \frac{1}{2}m^3$ واجب

10) $\frac{1}{5} - 25b^3$ واجب

تأكد من فهمك : حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى ابسط صورة :

1) $y^3 + 216 = (y+6)(y^2 - 6y + 36)$

2) $x^3 + z^3 = (x+z)(z^2 - xz + z^2)$

3) $125 + 8z^3$ واجب

4) $\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{8}$ واجب

$5)\ \frac{1}{a^3}+\frac{1}{64}=(\frac{1}{a}+\frac{1}{4})(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{4a}+\frac{1}{16})$

$6)\ \frac{1}{3}t^3+9=\frac{1}{3}(t^3+27)=\frac{1}{3}(t+3)(t^2-3t+9)$

$7)\ 0.125+v^3$ واجب

$8)\ 1+0.008\,z^3$ واجب

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الاتية الى أبسط صورة :

$9)\ a^3-8^3$ واجب

$10)\ (8y^3-64)=(2y-4)(4y^2+8y+16)$

$11)\ \frac{1}{c^3}-\frac{1}{8}=(\frac{1}{c}-\frac{1}{2})\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{4}\right)$

$12)\ \frac{1}{2}v^3-4$ واجب

$13)\ 0.125-m^3=(0.5-m)(0.5+0.5m+m^2)$

$14)\ 25-\frac{1}{5}n^3$ واجب

$15)\ 3b^3-81=3(b^3-27)=3(b-3)(b^2+3b+9)$

$16)\ 0.216v^3-0.008t^3$ واجب

تدرب وحل التمرينات : حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى ابسط صورة :

$17)\ 6^3+x^3$ واجب

$18)\ 27+64x^3$ واجب

$19)\ 125y^3+1=(5y+1)(25y^2-5y+1)$

$20)\ \frac{1}{64}+\frac{8}{125}y^3=(\frac{1}{4}+\frac{2}{5}y)(\frac{1}{16}-\frac{2y}{20}+\frac{4}{25}y^2)$

$21)\ \frac{1}{b^3}+\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{2b}+\frac{1}{4}\right)$

$22)\ \frac{1}{5}v^3+25=\frac{1}{5}(v^3+125)=\frac{1}{5}(v+5)(v^2-5v+25)$

$23)\ 0.027+27n^3$ واجب

$24)\ 0.125x^3+0.008y^3=(0.5x+0.2y)(0.25x^2-0.1xy+0.04y^2)$



حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى ابسط صورة :

25) $y^3 - 64 = (y-4)(y^2+4y+16)$

26) $27y^3 - 8$ واجب

27) $\frac{1}{x^3} - \frac{27}{8} = (\frac{1}{x} - \frac{3}{2})(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x} + \frac{9}{4})$

28) $9 - \frac{1}{3}n^3 = \frac{1}{3}(27 - n^3) = \frac{1}{3}(3-n)(9+3n+n^2)$

29) $0.001 - v^3$ واجب

30) $4 - \frac{1}{2}t^3 = \frac{1}{2}(8 - t^3) = \frac{1}{2}(2-t)(4+2t+t^2)$

31) $25c^3 - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(125c^3 - 1) = \frac{1}{5}(5c-1)(25c^2+5c+1)$

32) $0.001x^3 - 0.008y^3 = (0.1x - 0.2y)(0.01x^2 + 0.02xy + 0.04y^2)$

تدرب وحل مسائل حياتية



33) مكتبة : مكتبة مدينة شتوتغارت هي واحدة من أجمل المكتبات في العالم وأفخمها وتقع في ألمانيا، كما أنها من أكثر المكتبات تماشيا مع متطلبات التعليم الحديثة . بناية المكتبة على شكل مكعب طول ضلعه $\frac{1}{2}y^3 - 13\frac{1}{2}$ متر . حلل المقدار الذي يمثل طول الضلع .

الحل :

$$\frac{1}{2}y^3 - 13\frac{1}{2} = \frac{1}{2}y^3 - \frac{27}{2} = \frac{1}{2}(y^3 - 27) = \frac{1}{2}(y-3)(y^2+3y+9)$$



34) حوض سمك : حوض سمك الزينة حجمه $25x^3$ مترا مكعبا ، وضع في داخله حجر مكعب الشكل حجمه $\frac{1}{5}$ متر مكعب ، ملئ بالماء كاملاً . أكتب المقدار الذي يمثل حجم الماء ثم حلله ؟

الحل : حجم الماء = حجم المكعب − حجم الحجر

حجم الماء $= v_2 - v_1$

$$25x^3 - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(125x^3 - 1) = \frac{1}{5}(5x-1)(25x^2+5x+1)$$



35) سكن : بدأت المنازل تأخذ أشكالاً مختلفة في التصميم مع تطور هندسة العمارة فصممت هذه المنازل على شكل مكعبات . فإذا كان حجم المنزل الأول $\frac{8}{a^3}$ متر مكعب ، وحجم المنزل الثاني $\frac{27}{b^3}$ متر مكعب . أكتب حجم المنزلين معا ثم حلل المقدار .

الحل :

$$\frac{8}{a^3} + \frac{27}{b^3} = (\frac{2}{a} + \frac{3}{b})(\frac{4}{a^2} - \frac{6}{ab} + \frac{9}{b^2})$$

فكر

36) تحدٍّ : حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى أبسط صورة :

$$0.002z^3 - 0.016y^3 = 0.002(z^3 - 8y^3) = 0.002(z - 2y)(z^2 + 2zy + 4y^2)$$

37) أصحح الخطأ : حللت بشرى المقدار $8v^3 - 0.001$ كما يأتي :

$$8v^3 - 0.001 = (2v + 0.1)(4v^2 - 0.4v + 0.01)$$ أكتشف خطأ بشرى وصححه

الحل : الخطأ هو اشارة القوس الأول وكذلك $-0.4v$ في القوس الثاني

$$8v^3 - 0.001 = (2v - 0.1)(4v^2 + 0.2v + 0.01)$$

38) حس عددي : هل يمكن جمع العددين 27 , 8 بطريقة تحليل مجموع مكعبين ؟ وضح اجابتك .

$$27 + 8 = (3^3 + 2^3) = (3 + 2)(9 - 6 + 4) = (5)(7) = 35$$ نعم يمكن

أكتب : الاشارات بين الحدود في الاقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحا :

$$(125 - x^3) = (5 - x)(9 + 3n + n^2)$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

تبسيط المقادير الجبرية

فكرة الدرس :

- ضرب المقادير الجبرية النسبية وقسمتها وكتابتها بأبسط صورة .
- جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها وكتابتها بأبسط صورة .

المفردات :

- النسبة ، الكسر

تبسيط ضرب المقادير الجبرية النسبية وقسمتها

مثال : أكتب نسبة ثمن باقة الزهور الواحدة الى الثمن الكلي للباقات بابسط صورة :

$$\frac{\text{ثمن باقة الزهور}}{\text{ثمن الباقات الكلية للزهور}} = \frac{2x - 6}{x^2 - x - 6} = \frac{2(x - 3)}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{2}{x + 2}$$

مثال : أكتب كل مقدار من المقادير الآتية بابسط صورة :

$$1)\ \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)(x - 2)} = \frac{x + 2}{x - 2}$$

$$2)\ \frac{5z + 10}{z - 3} \times \frac{z^3 - 27}{z^2 + 6z + 8} = \frac{5(z + 2)}{z - 3} \times \frac{(z - 3)(z^2 + 3z + 9)}{(z + 4)(z + 2)} = \frac{5(z^2 + 3z + 9)}{z + 4}$$

$$3)\ \frac{16 - x^2}{3x + 5} \times \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 3x - 4} = \frac{(4 + x)(4 - x)}{3x + 5} \times \frac{(3x + 5)(x - 1)}{(x + 4)(x - 1)} = 4 - x$$

$$3)\ \frac{8 + t^3}{4 - 2t + t^2} \div \frac{(2 + t)^2}{t^2 + 9t + 14} = \frac{8 + t^3}{4 - 2t + t^2} \times \frac{t^2 + 9t + 14}{(2 + t)^2}$$

$$= \frac{(2+t)(4-2t+t^2)}{4-2t+t^2} \times \frac{(t+2)(t+7)}{(2+t)(2+t)(2+t)} = \frac{t+7}{2+t}$$

تبسيط جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها

مثال : أكتب المقدار الجبري النسبي بابسط صورة :

المضاعف المشترك الأصغر هو $(y+2)$

$$\frac{y^2}{y+2} - \frac{4}{y+2} = \frac{y^2-4}{y+2} = \frac{(y+2)(y-2)}{y+2} = y-2$$

مثال : أكتب كل مقدار من المقادير التالية بابسط صورة :

يمكن الاختصار في حالة الجمع والطرح فقط بين البسط والمقام نفسه

$$1)\ \frac{7x-14}{x^2-4} + \frac{5}{x+2} = \frac{7(x-2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{5}{x+2}$$

المضاعف المشترك الأصغر بين المقامات نفسه فلذلك قمنا مباشرة بعملية الجمع

$$= \frac{7}{x+2} + \frac{5}{x+2} = \frac{7+5}{x+2} = \frac{12}{x+2}$$

$$2)\ \frac{4z}{2z-5} - \frac{z}{z+3}$$

المضاعف المشترك الأصغر بين المقامات $= (2z-5)(z+3)$

$$\frac{4z(z+3)-z(2z-5)}{(2z-5)(z+3)} = \frac{4z^2+12z-2z^2+5z}{(2z-5)(z+3)} = \frac{2z^2+17z}{(2z-5)(z+3)}$$

$$3)\ \frac{t^2+2t+4}{t^3-8} + \frac{12}{3t-6} = \frac{t^2+2t+4}{(t-2)(t^2+2t+4)} + \frac{\overset{4}{12}}{3(t-2)}$$

المضاعف المشترك الأصغر بين المقامات نفسه فلذلك قمنا مباشرة بعملية الجمع

$$= \frac{1}{(t-2)} + \frac{4}{(t-2)} = \frac{1+4}{t-2} = \frac{5}{t-2}$$

$$4)\ \frac{\frac{3}{7-x}}{\frac{5}{49-14x+x^2}} - \frac{40-6x}{10} = \frac{3}{7-x} \div \frac{5}{49-14x+x^2} - \frac{40-6x}{10}$$

$$= \frac{3}{7-x} \times \frac{49-14x+x^2}{5} - \frac{2(20-3x)}{10} = \frac{3}{7-x} \times \frac{(7-x)(7-x)}{5} - \frac{2(20-3x)}{\underset{5}{10}}$$

$$= \frac{3(7-x)}{5} - \frac{(20-3x)}{5} = \frac{21-3x}{5} - \frac{20-3x}{5} = \frac{21-3x-20+3x}{5} = \frac{1}{5}$$

المضاعف المشترك الأصغر بين المقامات نفسه فلذلك قمنا مباشرة بعملية الطرح

$$5)\ \frac{8}{v+4} + \frac{2}{v-4} - \frac{1}{v^2-16}$$

المضاعف المشترك الأصغر بين المقامات $= (v+4)(v-4)$

$$= \frac{8}{v+4} + \frac{2}{v-4} - \frac{1}{(v+4)(v-4)}$$

$$= \frac{8(v-4)+2(v+4)-1}{(v+4)(v-4)} = \frac{8v-32+2v+8-1}{(v+4)(v-4)} = \frac{10v-25}{(v+4)(v-4)}$$

تأكد من فهمك : حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى ابسط صورة :

أكتب كل مقدار من المقادير التالية بابسط صورة :

1) $\frac{2z^2-4z+2}{z^2-7z+6}=\frac{(2z-2)(z-1)}{(z-6)(z-1)}=\frac{(2z-2)}{(z-6)}$

2) $\frac{y^3+27}{y^3-3y^2+9y}=\frac{(y+3)(y-3y+9)}{y\,(y^2-3y+9)}=\frac{(y+3)}{y}$

3) $\frac{5x+3}{x+3}\times\frac{x^2+5x+6}{25x^2-9}=\frac{5x+3}{x+3}\times\frac{(x+3)(x+2)}{(5x+3)(5x-3)}=\frac{(x+2)}{(5x-3)}$

4) $\frac{z^2+7z-8}{z-1}\times\frac{z^2-4}{z^2+6z-16}$ واجب

5) $\frac{x^2-9}{x^2-4x+4}\times\frac{x^2-4}{x^2-x-6}$ واجب

6) $\frac{2y^2-2y}{y^2-9}\div\frac{y^2+y-2}{y^2+2y-3}=\frac{2y^2-2y}{y^2-9}\times\frac{y^2+2y-3}{y^2+y-2}$

$=\frac{2y(y-1)}{(y+3)(y-3)}\times\frac{(y+3)(y-1)}{(y+2)(y-1)}=\frac{2y(y-1)}{(y-3)(y+2)}$

أكتب كل مقدار من المقادير التالية بابسط صورة :

7) $\frac{2}{x^2-9}+\frac{3}{x^2-4x+3}=\frac{2}{(x+3)(x-3)}+\frac{3}{(x-3)(x-1)}$

$x-1$, $x+3$

المضاعف المشترك الأصغر بين المقامات $=(x+3)(x-3)(x-1)$

$=\frac{2(x-1)}{(x+3)(x-3)(x-1)}+\frac{3(x+3)}{(x+3)(x-3)(x-1)}$

$=\frac{2x-2+3x+9}{(x+3)(x-3)(x-1)}=\frac{5x+7}{(x+3)(x-3)(x-1)}$

8) $\frac{2y^3-128}{y^3+4y^2+16y}-\frac{y-1}{y}=\frac{2(y^3-64)}{y(y^2+4y+16)}-\frac{y-1}{y}$

$=\frac{2(y-4)(y^2+4y+16)}{y(y^2+4y+16)}-\frac{y-1}{y}=\frac{2(y-4)}{y}-\frac{y-1}{y}=\frac{2y-8-y+1}{y}=\frac{y-7}{y}$

9) $\frac{z^2+z+1}{z^4-z}-\frac{z+3}{z^2+2z-3}$ واجب



10) $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}-1=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}-\frac{1}{1}=\frac{(x+1)}{\underbrace{(x-1)}_{1}}-\frac{1}{\underbrace{1}_{x-1}}$

$=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)}=\frac{x+1-x+1}{x-1}=\frac{2}{x-1}$

11) $\frac{3}{z-1}+\frac{2}{z+3}+\frac{8}{z^2+4z-3}$ واجب

12) $\frac{y-3}{y-1}+\frac{5y-15}{(y-3)^2}-\frac{3y+1}{y^2-4y+3}=\frac{y-3}{y-1}+\frac{5(y-3)}{(y-3)(y-3)}-\frac{3y+1}{(y+3)(y-1)}$

$=\frac{y-3}{\underbrace{y-1}_{y-3}}+\frac{5}{\underbrace{(y-3)}_{y-1}}-\frac{3y+1}{\underbrace{(y-3)(y-1)}_{1}}$

$=\frac{(y-3)(y-3)+5(y-1)-(3y+1)}{(y-3)(y-1)}$

$=\frac{y^2-3y-3y+9+5y-5-3y-1}{(y-3)(y-1)}=\frac{y^2-4y+3}{(y-3)(y-1)}=\frac{(y-3)(y-1)}{(y-3)(y-1)}=1$

تدرب وحل التمرينات

أكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة :

13) $\frac{x+5}{12x}\times\frac{6x-30}{x^2-25}=\frac{x+5}{12x}\times\frac{6(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\frac{6}{\underbrace{12x}_{2}}=\frac{1}{2x}$

14) $\frac{y+3}{2y^2+6y+18}\times\frac{y^3-27}{y^2-9}=\frac{y+3}{2(y^2+3y+9)}\times\frac{(y-3)(y^2+3y+9)}{(y+3)(y-3)}=\frac{1}{2}$

15) $\frac{3-x}{4-2x}\times\frac{x^2+x-6}{9-x^2}$ واجب

16) $\frac{y+2}{2y-4}\div\frac{y^3+8}{y-2}=\frac{y+2}{2(y-2)}\times\frac{y-2}{y^3+8}=\frac{y+2}{2(y-2)}\times\frac{y-2}{(y+2)(y^2-2y+4)}$

$=\frac{1}{2(y^2-2y+4)}$

17) $\frac{y^2-7y}{y^3-27}\div\frac{y^2-49}{y^2+3y+9}$ واجب

18) $\frac{64-z^2}{32+8z+2z^2}\div\frac{(4-z)^2}{16-z^2}$ واجب

أكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة :

19) $\frac{5}{x^2-36}-\frac{2}{x^2-12x+36}=\frac{5}{(x+6)(x-6)}-\frac{2}{(x-6)(x-6)}$

$=\frac{5}{(x+6)(x-6)}-\frac{2}{(x-6)^2}$



$$=\frac{5}{\underbrace{(x+6)(x-6)}_{x-6}}-\frac{2}{\underbrace{(x-6)^2}_{x+6}}$$

$$=\frac{5(x-6)-2(x+6)}{(x+6)(x-6)^2}$$

المضاعف المشترك الاصغر $(x+6)(x-6)^2$

$$=\frac{5x-30-2x-12}{(x+6)(x-6)^2}=\frac{3x-42}{(x+6)(x-6)^2}$$

20) $\frac{y^2-y}{y^3-1}-\frac{1}{y^2+y+1}$ واجب

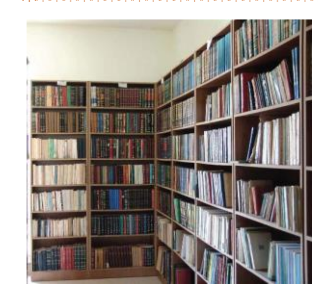
21) $\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-2}+\frac{4+2x+x^2}{x^3-8}=\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-2}+\frac{4+2x+x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}$

المضاعف المشترك الأصغر بين المقامات نفسه فلذلك نقوم مباشرة بعملية الجمع

$$=\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-2}=\frac{3-2+1}{x-2}=\frac{0}{x-2}=0$$

22) $\frac{y-5}{y+1}+\frac{y-1}{y+5}+\frac{25}{y^2+6y+5}$ واجب

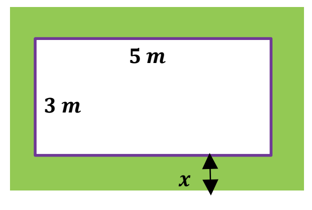
تدرب وحل مسائل حياتية



23) مكتبة : اذا كان المقدار الجبري x^2-4 يمثل عدد الكتب العلمية في المكتبة ، والمقدار الجبري x^2+x-6 يمثل عدد الكتب الأدبية فيها . أكتب نسبة الكتب العلمية الى الكتب الأدبية بأبسط صورة .

الحل :

$$\frac{\text{عدد الكتب العلمية}}{\text{عدد الكتب الأدبية}}=\frac{x^2-4}{x^2+x-6}=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-2)}=\frac{(x+2)}{(x+3)}$$



24) هندسة : مستطيل أبعاده 3 , 5 أمتار وسع الى مستطيل أكبر وذلك بأحاطته بممر عرضه x متر . أكتب المقدار الجبري الذي يمثل مجموع نسبتي طول المستطيل قبل التوسيع الى طوله بعد التوسيع ونسبة عرض المستطيل قبل التوسيع الى عرضه بعد التوسيع بأبسط صورة .

الحل : طوله 5 قبل التوسع و $5+x$ بعد التوسع والنسبة هي $\frac{5}{5+x}$

عرضه 3 قبل التوسع و $3+x$ بعد التوسع والنسبة هو $\frac{3}{3+x}$

$$\frac{5}{\underbrace{5+x}_{3+x}}+\frac{3}{\underbrace{3+x}_{5+x}}$$ المضاعف المشترك الأصغر $(5+x)(3+x)$

$$=\frac{5(3+x)+3(5+x)}{(5+x)(3+x)}$$

$$= \frac{15+5x+15+3x}{(5+x)(3+x)} = \frac{30+8x}{(5+x)(3+x)}$$



25) ألعاب نارية : المقدار الجبري $20+15t-5t^2$ يمثل ارتفاع بالامتار لقذيفة ألعاب نارية أطلقت من سطح بناية ارتفاعها 20 مترا ، اذا t تمثل زمن وصول القذيفة بالثواني الى الهدف . والمقدار الجبري $4+19t-5t^2$ يمثل ارتفاع قذيفة أخرى أطلقت من سطح بناية ارتفاعها 4 أمتار . أكتب نسبة ارتفاع القذيفة الأولى الى ارتفاع القذيفة الثانية بأبسط صورة .

الحل :

$$\frac{20+15t-5t^2}{4+19t-5t^2} = \frac{5(4+3t-t^2)}{(1+5t)(4-t)} = \frac{5(1+t)(4-t)}{(1+5t)(4-t)} = \frac{5(1-t)}{1+5t}$$

فكر

26) تحدٍّ : بسط المقدار الجبري الاتي الى ابسط صورة :

$$\frac{y^2-5}{2y^3-16} \div \frac{y-\sqrt{5}}{2y^2+4y+8} = \frac{(y+\sqrt{5})(y-\sqrt{5})}{2(y^3-8)} \times \frac{2(y^2+2y+4)}{y-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(y+\sqrt{5})(y-\sqrt{5})}{2(y-2)(y^2+2y+4)} \times \frac{2(y^2+2y+4)}{y-\sqrt{5}} = \frac{y+\sqrt{5}}{y-2}$$

27) أصحح الخطأ : بسطت سماح المقدار الجبري وكتبته بأبسط صورة كما يأتي :

$$\frac{z^2-z-30}{5+z} \times \frac{2z+12}{z^2-36} = 1$$

أكتشف خطأ سماح وصححه

الحل : الخطأ في الناتج ويساوي 2

$$\frac{z^2-z-30}{5+z} \times \frac{2z+12}{z^2-36} = \frac{(z-6)(z+5)}{5+z} \times \frac{2(z+6)}{(z+6)(z-6)} = 2$$

28) حس عددي : ما ناتج جمع المقدارين الجبريين بدون استعمال الورقة والقلم ؟ وضح اجابتك

الحل :

$$\frac{5}{x^2-49} + \frac{-4}{(x-7)(x+7)} = \frac{1}{(x-7)(x+7)}$$

أكتب : قيمة المقدار الجبري بابسط صورة

$$\frac{z^2+z-6}{2z^2+2z-12} \div \frac{z^2-16}{2z+8} = \frac{z^2+z-6}{2(z^2+z-6)} \times \frac{2z+8}{z^2-16} = \frac{1}{2} \times \frac{2(z+4)}{(z+4)(z-4)} = \frac{1}{z-4}$$

أختبار الفصل

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين :

1) $(x+5)^2 = (x+5)(x+5) = x^2+5x+5x+25 = x^2+10x+25$

2) $(v-\sqrt{2})(v+\sqrt{2}) = v^2+\sqrt{2}v-\sqrt{2}v+2 = v^2-2$

3) $(2-x)(5-x) = 10-2x-5x+x^2 = 10-7x+x^2$

4) $(2y-3)(y+9)$ واجب

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود :

5) $(x+11)(x^2-11x+121) = (x^3-11x^2+121x+11x^2-121x+1331)$

$= (x^3+1331)$

6) $\left(\frac{1}{3}-y\right)\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}y+y^2\right) = (\frac{1}{27}+\frac{1}{9}y+\frac{1}{3}y^2-\frac{1}{9}y-\frac{1}{3}y^2-y^3 = \frac{1}{27}-y^3$

7) $(y-1)^3$ واجب

8) $\left(z+\frac{1}{4}\right)^3 = \left(z+\frac{1}{4}\right)\left(z+\frac{1}{4}\right)^2 = \left(z+\frac{1}{4}\right)\left(z^2+\frac{2}{4}z+\frac{1}{16}\right)$

$= z^3+\frac{2}{4}z^2+\frac{1}{16}z+\frac{1}{4}z^2+\frac{2}{16}z+\frac{1}{64} = z^3+\frac{3}{4}z^2+\frac{3}{16}z+\frac{1}{64}$

حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل :

9) $8x^2-12x = 4x(2x-3)$

التحقق : $4x(2x-3) = 4x(2x)-4x(3) = 8x^2-12x$

10) $7y^3+14y^2-21y$ واجب

11) $\sqrt{18}z^3r+\sqrt{2}(zr^2-zr) = 3\sqrt{2}\,z^3r+\sqrt{2}\,zr^2-\sqrt{2}\,zr = \sqrt{2}\,zr(3z^2+r-1)$

التحقق :

$\sqrt{2}\,zr(3z^2+r-1) = \sqrt{2}\,zr(3z^2)+\sqrt{2}\,zr(r)-\sqrt{2}\,zr(1) = 3\sqrt{2}\,z^3r+\sqrt{2}\,zr^2-\sqrt{2}\,zr$

حلل المقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر :

12) $\frac{2}{3}(y+5)+\frac{1}{3}y(y+5) = (y+5)(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}y)$

13) $\sqrt{5}\,z(z^2-1)-\sqrt{2}\,z^2(z^2-1)$ واجب

حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع :

14) $6x^4-18x^3+10x-30 = (6x^4-18x^3)+(10x-30)$

$= 6x^3(x-3)+10(x-3) = (x-3)(6x^3+10)$

15) $56-8y+14y^2-2y^3$ واجب

حلل المقدار بالتجميع مع المعكوس :

16) $9x^3 - 6x^2 + 8 - 12x$ واجب

17) $11z^3 - 44z^2 + 5(2 - z) = \sqrt{11}z^3 - 2\sqrt{11}z^2 + 10 - 5z$

$= \sqrt{11}z^2(z - 2) + 5(2 - z) = \sqrt{11}z^2(z - 2) - 5(z - 2) = (z - 2)(\sqrt{11}z^2 - 5)$

حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية :

18) $16 - x^2$ واجب

19) $\frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{27} = \frac{1}{3}\left(z^2 - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3}(z + \frac{1}{3})(z - \frac{1}{3})$

20) $\frac{1}{16}v - \frac{1}{2}v^4 = \frac{1}{2}v\left(\frac{1}{8} - v^3\right) = \frac{1}{2}v(\frac{1}{2} - v)(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}v + v^2)$

21) $8x^3 - \frac{1}{125}$ واجب

22) $81 - 18y + y^2$ واجب

23) $7z^2 - 36z + 5 = (7z - 1)(z - 5)$

حدد أي من المقادير الجبرية التالية يمثل مربعا كاملاً وحلله :

24) $25x^2 + 30x + 9 = \left((5x + 3)(5x + 3)\right)$ تمثل مربعا كاملاً

الوسطين $15x$

الطرفين $15x$

الحد الوسط $30x$

25) $49 - 14y + y^2$ واجب

26) $4v^2 + 4\sqrt{5}v + 5 = \left((2v + \sqrt{5})(2v + \sqrt{5})\right)$ تمثل مربعا كاملاً

الوسطين $2\sqrt{5}v$

الطرفين $2\sqrt{5}v$

الحد الوسط $4\sqrt{5}v$

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعا كاملاً وحلله :

27) $x^2 + \cdots \ldots + 81 = x^2 + 18x + 81 = (x + 9)(x + 9)$

الحد الوسط $= \pm 2\sqrt{(\text{الحد الأول})(\text{الحد الثالث})}$

الحد الوسط $= 2\sqrt{(x^2)(81)} = 2(x)(9) = 18x$

28) $36 - 12y + \cdots.. = 36 - 12y + y^2 = (6 - y)(6 - y)$

الحد الثالث $= \frac{(\text{الحد الوسط})^2}{4\,(\text{الحد الأول})}$

الحد الثالث $= \frac{(-12y)^2}{4\,(36)} = \frac{144y^2}{144} = y^2$

29) $7 - \cdots ... + 4z^2$ واجب

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية :

30) $x^2 + 7x + 10$ واجب

31) $x^2 - 5\sqrt{3}x + 18 = (x - 3\sqrt{3})(x - 2\sqrt{3})$

32) $2v^2 + 9v + 7$ واجب

33) $32 - 16x + 2x^2$ واجب

34) $\frac{1}{4}y^2 - 2y + 3 = \frac{1}{4}(y^2 - 8y + 12) = \frac{1}{4}(y - 6)(y - 2)$

35) $12 - 7\sqrt{2}v + 2v^2 = (4 - \sqrt{2}v)(3 - \sqrt{2}v)$

36) $8 + 27x^3 = (2 + 3x)(4 - 6x + 9x^2)$

37) $125y^3 - 1 = (5y - 1)(25y^2 + 5y + 1)$

38) $\frac{1}{v^3} - \frac{8}{27}$ واجب

39) $1 + 0.125y^3$ واجب

40) $z^3 - 0.027$ واجب

41) $3 - \frac{1}{9}v^3$ واجب

أكتب كل مقدار من المقادير التالية في أبسط صورة :

42) $\frac{27 - 8z^3}{4z^2 - 9} \div \frac{9 + 6z + 4z^2}{9 + 6z} = \frac{(3 - 2z)(9 + 6z + 4z^2)}{(2z + 3)(2z - 3)} \times \frac{9 + 6z}{9 + 6z + 4z^2}$

$= \frac{(3 - 2z)(9 + 6z + 4z^2)}{(2z + 3)(2z - 3)} \times \frac{3(3 + 2z)}{9 + 6z + 4z^2} = \frac{3(3 - 2z)}{2z - 3} = \frac{-3(2z - 3)}{2z - 3} = -3$

43) $\frac{7}{x^2 - 25} - \frac{6}{x^2 + 10x + 25} = \frac{7}{(x + 5)(x - 5)} - \frac{6}{(x + 5)(x + 5)}$

$= \frac{7}{(x + 5)(x - 5)} - \frac{6}{(x + 5)^2}$

المضاعف المشترك الأصغر $(x-5)(x+5)^2$

$$= \frac{7}{\underbrace{(x+5)(x-5)}_{x+5}} - \frac{6}{\underbrace{(x+5)^2}_{x-5}}$$

$$= \frac{7(x+5) - 6(x-5)}{(x-5)(x+5)^2}$$

$$= \frac{7x+35-6x+30}{(x-5)(x+5)^2} = \frac{x+65}{(x-5)(x+5)^2}$$

44) $\frac{y^2-1}{1-y^3} + \frac{1+y}{1+2y+y^2}$ واجب

45) $\frac{z+3}{z+5} - \frac{z-5}{z-3} + \frac{1}{z^2+2z-15}$ واجب



الفصل الثالث

المعادلات

الفصل الثالث

المعادلات

حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين

فكرة الدرس : حل نظام من معادلتين خطيتين بيانيا وبالتعويض وبالحذف .

المفردات :

- معادلة خطية
- نظام المعادلات الخطية
- حل النظام

حل نظام من معادلتين خطيتين بيانيا

لحل معادلتين بيانيا نتبع الآتي :

$$L_1: a_1x + b_1y = c_1$$
$$L_2: a_2x + b_2y = c_2$$

- نأخذ المعادلة الاولى ونفرض قيم لـ (x) ولتكن مثلاً $(2 , 1 , 0)$ حيث نقوم بتعويض هذه القيم في المعادلة لأيجاد قيم y فتنتج نقاط نقوم من خلال هذه النقاط برسم المستقم الأول للمعادلة الأولى .
- نتبع نفس الخطوات التي قمنا بها مع المعادلة الأولى فينتج المستقيم الثاني الخاص بالمعادلة الثانية .
- ناتج تقاطع المستقيمين يمثل مجموعة الحل للمعادلتين .

مثال : لدى أحمد معمل تعليب التمور، بلغت تكاليف العلب وهي فارغة 100000 دينار ، وملء العلبة الواحدة بالتمر يكلف 500 دينار، وتباع بـ 1000 دينار ، ويرغب أحمد في معرفة عدد العلب التي عليه بيعها ليحقق ربحا ، جد عدد العلب التي يبيعها أحمد ليحقق ربحا .

الحل : نفرض تكاليف الانتاج بالمتغير y ، نفرض عدد العلب بالمتغير x .

$y = 500x + 100000 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ تمثل تكاليف الانتاج الكلية

$y = 1000x \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ تمثل القيمة الكلية للمبيعات

$y - 500x = 100000 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$\mp y \mp 1000x = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ بالطرح

$\frac{500x}{500} = \frac{100000}{500} \Rightarrow x = 200$ عدد العلب

مثال : جد مجموعة الحل للنظام بيانيا :

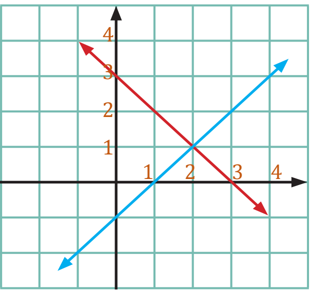
$x - y = 1 \ldots\ldots\ldots (1)$

$x + y = 3 \ldots\ldots\ldots (2)$

الحل : تمثيل المعادلتين بيانيا وتحديد نقطة تقاطع المستقيمين

x	$y = x - 1$	(x , y)
0	-1	$(0 , -1)$
1	0	$(1 , 0)$
2	1	$(2 , 1)$

x	$y = 3 - x$	(x , y)
0	3	$(0 , 3)$
1	2	$(1 , 2)$
2	1	$(2 , 1)$



مجموعة الحل $S = \{(2 , 1)\}$

حل نظام من معادلتين خطيتين بالتعويض

نقوم بجعل أحد المعادلتين بدلالة متغير واحد أما y أو x ثم نعوض المعادلة الجديدة في المعادلة الأخرى ونقوم بايجاد قيمة المتغير y أو x .

مثال : جد مجموعة الحل للنظام في R باستعمال التعويض :

$$(1)\quad y = 4x \quad \dots\dots(1)$$
$$y = x + 6 \quad \dots\dots(2)$$

الحل : نعوض معادلة (1) في معادلة (2)

$$y = 4x$$
$$4x = x + 6 \Rightarrow 4x - x = 6 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \Rightarrow x = 2$$

نعوض قيمة x في (1)

$$y = 4x \Rightarrow y = 4(2) = 8$$
$$S = \{(2\,,8)\}$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

$$(2)\quad x + 8y = 10 \dots\dots(1)$$
$$x - 4y = 2 \quad \dots\dots(2)$$

الحل : نأخذ المعادلة (2) ونجعلها بدلالة x فتكون كالأتي :

$$x - 4y = 2 \Rightarrow x = 2 + 4y \dots\dots\dots(*)$$

نعوض المعادلة $(*)$ في (1)

$$x + 8y = 10 \Rightarrow 2 + 4y + 8y = 10 \Rightarrow 2 + 12y = 10$$

$$12y = 10 - 2 \Rightarrow \frac{12y}{12} = \frac{8}{12} \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$ نعوض في معادلة $(*)$

$$x = 2 + 4y \Rightarrow x = 2 + 4\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow x = \frac{2}{1} + \frac{8}{3} \Rightarrow x = \frac{6}{3} + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

$$S = \left\{\left(\frac{14}{3}\,,\frac{2}{3}\right)\right\}$$

حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف

نقوم في هذه الحالة بحذف أحد المتغيرين ويبقى المتغير الآخر لإيجاد قيمته .

مثال : جد مجموعة الحل للنظام في R باستعمال الحذف :

$$(1)\quad x + 2y = 5 \quad \dots\dots\dots\dots(1)$$
$$3x - y = 1 \quad \dots\dots\dots\dots(2)$$

الحل :

$$3 \times [x + 2y = 5] \quad \dots\dots\dots\dots(1)$$
$$1 \times [3x - y = 1] \quad \dots\dots\dots\dots(2)$$
$$3x + 6y = 15 \quad \dots\dots\dots\dots(1)$$
$$\mp 3x \pm y = \mp 1 \quad \dots\dots\dots\dots(2)$$ بالطرح

$\frac{7y}{7} = \frac{14}{2} \Longrightarrow y = 2 \qquad (1)$ نعوض في

$x + 2y = 5 \Longrightarrow x + 2(2) = 5 \Longrightarrow x + 4 = 5 \Longrightarrow x = 5 - 4 \Longrightarrow x = 1$

$$S = \{(1\,,2)\}$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

$(2)\ \ 3x + 4y = 10 \quad \dots\dots\dots\dots(1)$

$2x + 3y = 7 \quad \dots\dots\dots\dots(2)$

الحل :

$2 \times [3x + 4y = 10] \quad \dots\dots\dots\dots(1)$

$3 \times [2x + 3y = 7] \quad \dots\dots\dots\dots(2)$

$6x + 8y = 20 \quad \dots\dots\dots\dots(1)$

$\mp 6x \mp 9y = \mp 21 \quad \dots\dots\dots\dots(2)$ بالطرح

$-y = -1 \overset{\times -1}{\Longrightarrow} y = 1 \qquad (1)$ نعوض في

$3x + 4y = 10 \Longrightarrow 3x + 4(1) = 10 \Longrightarrow 3x + 4 = 10 \Longrightarrow 3x = 10 - 4 \Longrightarrow 3x = 6$

$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \Longrightarrow x = 2 \qquad\qquad S = \{(2\,,1)\}$

تأكد من فهمك

جد مجموعة الحل للنظام في R بيانيا :

$(1)\ \ 3x - y = 6 \quad \dots\dots(1)$

$x - y = 3 \quad \dots\dots(2)$

الحل : تمثيل المعادلتين بيانيا وتحديد نقطة تقاطع المستقيمين .

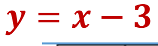
$3x - y = 6 \quad \dots\dots\dots\dots(1)$

$y = 3x - 6$

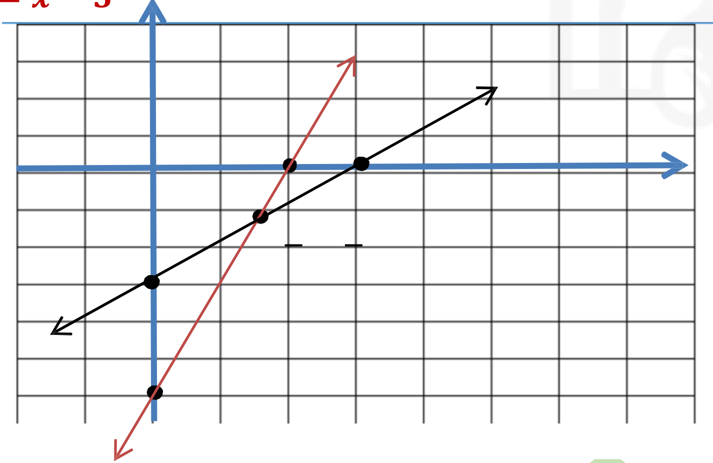
x	$y = 3x - 6$	$(x\,,y)$
0	$y = 3(0) - 6 = -6$	$(0\,,-6)$
1	$y = 3(1) - 6 = -3$	$(1\,,-3)$
2	$y = 3(2) - 6 = 0$	$(2\,,0)$

x	$y = x - 3$	$(x\,,y)$
0	$y = 0 - 3 = -3$	$(0\,,-3)$
1	$y = 1 - 3 = -2$	$(1\,,-2)$
2	$y = 2 - 3 = -1$	$(2\,,-1)$

$x - y = 3 \quad \dots\dots(2)$



$y = x - 3$



$$S = \{(\frac{3}{2}\,,\frac{-3}{2})\}$$

$(2)\ y - x = 3 \quad \dots\dots(1)$

$\quad\ y + x = 0 \quad \dots\dots(2)$ واجب

$(3)\ y = x - 2 \quad \dots\dots(1)$

$\quad\ y = 3 - x \quad \dots\dots(2)$

الحل : تمثيل المعادلتين بيانيا وتحديد نقطة تقاطع المستقيمين .

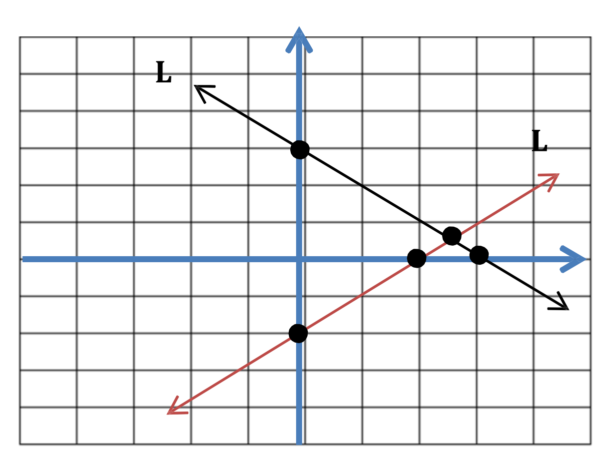
$y = x - 2 \ \dots\dots\dots(1)$

x	$y = x - 2$	(x, y)
0	$y = 0 - 2 = -2$	$(0, -2)$
1	$y = 1 - 2 = -1$	$(1, -1)$
2	$y = 2 - 2 = 0$	$(2, 0)$

x	$y = 3 - x$	(x, y)
0	$y = 3 - 0 = 3$	$(0, 3)$
1	$y = 3 - 1 = 2$	$(1, 2)$
2	$y = 3 - 2 = 1$	$(2, 1)$

$y = 3 - x \ \dots\dots(2)$

$S = \{(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})\}$



جد مجموعة الحل للنظام في R باستعمال طريقة التعويض لكل مما يأتي :

$(4)\ 2x + 3y = 1 \quad \dots\dots(1)$

$\quad\ 3x - 2y = 0 \quad \dots\dots(2)$

الحل : نأخذ المعادلة (2) ونجعلها بدلالة المتغير x

$3x - 2y = 0 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{2y}{3} \Rightarrow x = \frac{2y}{3} \dots\dots(*)$ نعوض في معادلة (١)

$$2x + 3y = 1 \Rightarrow 2\left(\frac{2y}{3}\right) + 3y = 1 \Rightarrow \left[\frac{4y}{3} + 3y = 1\right] \times 3 \Rightarrow \frac{4y}{3} \times 3 + 9y = 3$$

$$4y + 9y = 3 \Rightarrow \frac{13y}{13} = \frac{3}{13} \Rightarrow y = \frac{3}{13}$$

نعوض قيمة y في معادله (*)

$$x = \frac{2y}{3} \Rightarrow x = \frac{2\left(\frac{3}{13}\right)}{3} = \frac{\frac{6}{13}}{3} = \frac{6}{13} \div 3 = \frac{6}{13} \times \frac{1}{3} = \frac{6}{39} = \frac{2}{13}$$

$$S = \{(\frac{2}{13}, \frac{3}{13})\}$$

$(5)\ \ x - 2y = 11 \quad \dots\dots(1)$

$\quad\ 2x - 3y = 18 \quad \dots\dots(2)$

الحل : نأخذ المعادلة (1) ونجعلها بدلالة المتغير x

$x - 2y = 11 \Rightarrow x = 11 + 2y \dots\dots(*)$ نعوض في المعادلة (٢)

$2(11+2y)-3y=18 \Rightarrow 22+4y-3y=18 \Rightarrow 22+y=18$

$y=18-\ 22 \Rightarrow y=\ -4$

نعوض قيمة y في المعادلة $(*)$

$x=11+2\,(-4) \Rightarrow x=11-8 \Rightarrow x=3$

$S=\{(\,3\,,-4)\}$

$(6)\ y-5x=10\ \ \dots.(1)$

$y-3x=8\ \ \dots.(2)$ واجب

جد مجموعة الحل للنظام في R باستعمال طريقة الحذف لكل مما يأتي :

$(7)\ \ 3x-4y=12\ \ \dots\dots.(1)$

$5x+2y=-6\ \ \dots\dots.(2)$

الحل :

$5\times[3x-4y=12]\ \ \dots\dots.(1)$

$3\times[5x+2y=-6]\ \ \dots\dots.(2)$

$15x-20y=60\ \dots\dots.(1)$

$\mp15x\mp6y=\pm18\ \dots\dots.(2)$ بالطرح

$\frac{-26y}{-26}=\frac{78}{-26} \Rightarrow y=\ -3$ نعوض في معادلة (١)

$3x-4y=12 \Rightarrow 3x-4(-3)=12 \Rightarrow 3x+12=12 \Rightarrow 3x=12-12 \Rightarrow 3x=0$

$\frac{3x}{3}=\frac{0}{3} \Rightarrow x=0$ $\qquad S=\ \{(0\,,-3)\}$

$(8)\ \ \ x-3y=6\ \ \ \dots\dots.(1)$

$2x-4y=24\ \ \dots\dots.(2)$ واجب

$(9)\ \ 3y-2x-7=0\ \ \dots\dots.(1)$

$y+3x+5=0\ \ \dots\dots.(2)$ وزاري

الحل :

$3y-2x=7\ \ \ \dots\dots.(1)$

$y+3x=-5\ \ \dots\dots.(2)$

$1\times[3y-2x=7]\ \ \dots\dots.(1)$

$3\times[y+3x=-5]\ \ \dots\dots.(2)$

$3y-2x=7\ \ \ \ \ \dots\dots.(1)$

$\mp3y\mp9x=\pm15\ \dots\dots.(2)$ بالطرح

$\frac{-11x}{-11}=\frac{22}{-11} \Rightarrow x=-2$

نعوض قيمة x في معادلة (1)

$$3y-2x=7 \Rightarrow 3y-2(-2)=7 \Rightarrow 3y+4=7 \Rightarrow 3y=7-4 \Rightarrow \frac{3y}{3}=\frac{3}{3} \Rightarrow y=1$$

$$S=\{(-2\,,1)\}$$

جد مجموعة الحل للنظام في R وتحقق من صحة الحل :

$$(10)\ \frac{2x}{3}-\frac{y}{2}=1 \quad \dots\dots(1)$$

$$y-\frac{x}{3}=4 \quad \dots\dots(2)$$

الحل : نقوم بالضرب للمعادلة الأولى بالعدد (6) وهو المضاعف المشترك الأصغر بين المقامين والمعادلة الثانية قمنا بترتيبها وكذلك قمنا بضربها بالمضاعف المشترك الأصغر وهو (3)

$$\frac{2x}{3}-\frac{y}{2}=1\,]\times 6 \quad \dots\dots(1)$$

$$-\frac{x}{3}+y=4]\times 3 \quad \dots\dots(2)$$

$$6\times\frac{2x}{3}-6\times\frac{y}{2}=6 \quad \dots\dots(1)$$

$$3\times-\frac{x}{3}+3y=12 \quad \dots\dots(2)$$

$$4x-3y=6 \quad \dots\dots(1)$$

$$-x+3y=12 \quad \dots\dots(2) \quad \text{بالجمع}$$

$$3x=18 \Rightarrow \frac{3x}{3}=\frac{18}{3} \Rightarrow x=6$$

نعوض قيمة x في معادلة (1)

$$4x-3y=6 \Rightarrow 4(6)-3y=6 \Rightarrow 24-3y=6 \Rightarrow -3y=6-24 \Rightarrow -3y=-18$$

$$\frac{-3y}{-3}=\frac{-18}{-3} \Rightarrow y=6 \qquad S=\{(6\,,6)\}$$

التحقيق : ناخذ الطرف الأيسر

$$\frac{2x}{3}-\frac{y}{2} \Rightarrow \frac{2(6)}{3}-\frac{6}{2}=\frac{12}{3}-3=4-3=1 \quad \text{الطرف الأيمن}$$

$$(11)\ 0.2x-6y=4 \quad \dots\dots(1)$$

$$0.1x-7y=-2 \quad \dots\dots(2)$$

الحل :

$$\frac{2}{10}x-6y=4 \quad \dots\dots(1)$$

$$\frac{1}{10}x-7y=-2 \quad \dots\dots(2)$$

ونكمل الحل ...

$$(12)\ \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=2\frac{3}{4} \quad \dots\dots(1)$$
$$\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}y=6\frac{1}{4} \quad \dots\dots(2)$$

الحل :

$$(12)\ \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=\frac{11}{4} \quad \dots\dots(1)$$
$$\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}y=\frac{25}{4} \quad \dots\dots(2)$$ بالجمع

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x=\frac{11}{4}+\frac{25}{4}$$

$$\frac{2+1}{4}x=\frac{36}{4} \Rightarrow \frac{3}{4}x=\frac{36}{4}$$ طرفين في وسطين $$\Rightarrow 12x=144 \Rightarrow \frac{12x}{12}=\frac{144}{12} \Rightarrow x=12$$

نعوض قيمة x في معادله (1)

$$\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=\frac{11}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}(12)+\frac{2}{3}y=\frac{11}{4} \Rightarrow 6+\frac{2}{3}y=\frac{11}{4} \Rightarrow \frac{2}{3}y=\frac{11}{4}-6$$

$$\frac{2}{3}y=\frac{11-24}{4} \Rightarrow \frac{2}{3}y=\frac{-13}{4}$$ طرفين في وسطين $$\Rightarrow \frac{8y}{8}=\frac{-39}{8} \Rightarrow y=\frac{-39}{8}$$

$$S=\{(6,\frac{-39}{8})$$

تدرب وحل التمرينات

جد مجموعة حل النظام في R بيانيا :

$$(13)\ x-y=-4 \quad \dots\dots(1)$$
$$y+x=6 \quad \dots\dots(2)$$

واجب

$$(14)\ y=x-4 \quad \dots\dots(1)$$
$$x=2-y \quad \dots\dots(2)$$

الحل : تمثيل المعادلتين بيانيا وتحديد نقطة تقاطع المستقيمين .

$y=x-4 \quad \dots\dots\dots(1)$

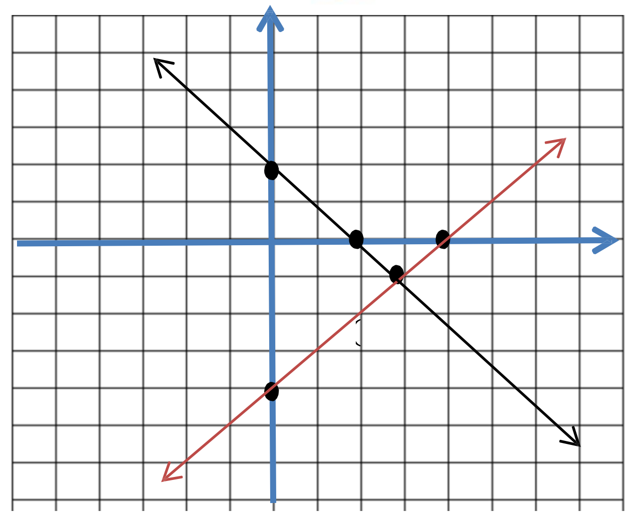
x	$y=2-x$	(x,y)
0	$y=2-0=2$	$(0,2)$
1	$y=2-1=1$	$(1,1)$
2	$y=2-2=0$	$(2,0)$

x	$y=x-4$	(x,y)
0	$y=0-4=-2$	$(0,-4)$
1	$y=1-4=-3$	$(1,-1)$
2	$y=2-4=-2$	$(2,-2)$

$y=2-x \quad \dots\dots(2)$

$$S=\{(3,-1)\}$$





جد مجموعة الحل للنظام في R باستعمال طريقة التعويض :

$(15)\ 3x + 2y = 2 \dots.(1)$

$x - y = 8 \quad \dots.(2)$

الحل : نأخذ المعادلة (2) ونجعلها بدلالة المتغير x

$x - y = 8 \Rightarrow \quad x = 8 + y \quad \dots\dots(*)$ نعوض في معادلة (١)

$3x + 2y = 2 \Rightarrow 3(8 + y) + 2y = 2 \Rightarrow 24 + 3y + 2y = 2 \Rightarrow 5y = 2 - 24$

$5y = -22 \Rightarrow \frac{5y}{5} = \frac{-22}{5} \Rightarrow y = \frac{-22}{5}$

نعوض قيمة y في معادلة $(*)$

$x = 8 + y \Rightarrow x = 8 + \left(\frac{-22}{5}\right) = \frac{40 + (-22)}{5} = \frac{18}{5}$

$S = \{(\frac{18}{5}, \frac{-22}{5})\}$

$(16)\ 2x - y = -4 \dots.(1)$

$3x - y = 3 \quad \dots.(2)$ واجب

جد مجموعة الحل للنظام في R باستعمال طريقة الحذف لكل مما يأتي :

$(17)\ 3x = 22 - 4y \quad \dots\dots.(1)$

$4y = 3x - 14 \quad \dots\dots.(2)$

الحل : نقوم بترتيب المعادلتين

$3x + 4y = 22 \quad \dots\dots.(1)$

$-3x + 4y = -14 \quad \dots.(2)$ بالجمع

$8y = 8 \Rightarrow \frac{8y}{8} = \frac{8}{8} \Rightarrow y = 1$ نعوض في معادلة (١)

$3x + 4y = 22 \Rightarrow 3x + 4(1) = 22 \Rightarrow 3x + 4 = 22 \Rightarrow 3x = 22 - 4 \Rightarrow 3x = 18$

$\frac{3x}{3} = \frac{18}{3} \Rightarrow x = 6 \qquad S = \{6, 1\}$

$(18)\ 5x - 3y = 6 \quad \ldots\ldots(1)$
$2x + 5y = -10 \quad \ldots\ldots(2)$ واجب

جد مجموعة الحل للنظام في R وتحقق من صحة الحل :

$(19)\ \frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 2 \quad \ldots\ldots(1)$
$2x + 3y = 6 \quad \ldots\ldots(2)$

الحل :

$\left[\frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 2\right] \times 3 \ \ldots(1)$

$2x + 3y = 6 \ \ldots\ldots(2)$

$3 \times \frac{x}{3} - 3 \times \frac{y}{3} = 6 \ \ldots\ldots(1)$

$2x + 3y = 6 \ \ldots\ldots(2)$

$x - y = 6 \ \ldots\ldots(1)$

$2x + 3y = 6 \ \ldots\ldots(2)$

$2 \times [x - y = 6] \ \ldots\ldots(1)$

$1 \times [2x + 3y = 6] \ \ldots\ldots(2)$

$2x - 2y = 12 \ \ldots\ldots(1)$

$\mp 2x \mp 3y = \mp 6 \ \ldots\ldots(2)$ بالطرح

$\frac{-5y}{-5} = \frac{6}{-5} \Rightarrow y = \frac{6}{-5}$ نعوض في معادلة (٢)

$2x + 3y = 6 \Rightarrow 2x + 3\left(\frac{6}{-5}\right) = 6 \Rightarrow 2x + \left(\frac{18}{-5}\right) = 6 \Rightarrow 2x = 6 + \frac{18}{5}$

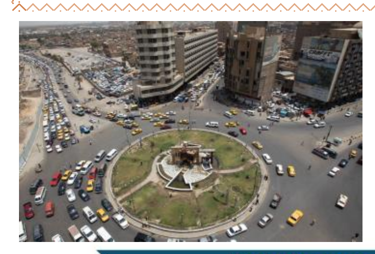
$2x = \frac{30 + 18}{5} \Rightarrow 2x = \frac{48}{5} \Rightarrow x = \frac{48}{10} = \frac{24}{5}$

$$S = \{(\frac{24}{5}, \frac{6}{-5})\}$$

$(20)\ 0.2x - 3y = 3 \quad \ldots\ldots(1)$
$0.1x - 6y = -3 \quad \ldots\ldots(2)$ واجب

تدرب وحل مسائل حياتية

(21) طقس : تقل عدد الأيام (x) التي تنخفض فيها درجة الحرارة في مدينة بغداد لشهر كانون الثاني عن 10 درجات سيليزية بمقدار 9 أيام على عدد الأيام (y) التي تزداد فيها درجة الحرارة على 10 درجات سيليزية .اكتب معادلتين تمثل هذا الموقف ، ثم جد حلّها بطريقة الحذف لإيجاد عدد الأيام في كل حالة.



الحل :

$y - x = 9$

$y + x = 31$ مجموع ايام الشهر بالجمع

$2y = 40 \Rightarrow \frac{2y}{2} = \frac{40}{2} \Rightarrow y = 20$ عدد الايام التي يزداد فيها درجة الحرارة

$x = 31 - 20 = 11$ عدد الايام التي تقل فيها درجة الحرارة

(22) تجارة : باع متجر 25 ثلاجة وغسالة، بسعر مليون دينار للثلاجة ونصف مليون دينار للغسالة . إذا كان ثمن هذه الأجهزة 20 مليون دينار فكم جهازاً باع من كل نوع ؟ اكتب معادلتين تمثلان المسألة ثم حلّهما بطريقة التعويض .

الحل :

نفرض عدد الثلاجات المباعة $= x$ نفرض عدد الغسالات المباعة $= y$

$x + y = 25 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$

$x + \frac{1}{2}y = 20 \quad \ldots\ldots\ldots(2)$

$$\left[x + \frac{1}{2}y = 20\right] \times 2 \Rightarrow 2x + y = 40 \ldots\ldots\ldots(2)$$

نأخذ المعادلة (١) ونجعلها بدلالة المتغير x

$x = 25 - y \quad \ldots\ldots(*)$ نعوض في معادلة (٢)

$2x + y = 40 \Rightarrow 2(25 - y) + y = 40 \Rightarrow 50 - 2y + y = 40 \Rightarrow -2y + y = 40 - 50$

$-y = -10 \Rightarrow y = 10$ عدد الغسالات نعوض في معادلة $(*)$

$x = 25 - 10 = 15$ عدد الثلاجات



(23) حفلةُ تخرّج : عمل سجاد وأنور حفلة بمناسبة تخرجهما من الكلية فكان عدد الأصدقاء الذين دعاهم سجاد أكثر بثلاثة من عدد الأصدقاء الذين دعاهم أنور . وكان عدد المدعوين 23 شخصا ، فكم شخصا دعا كل منهما؟ اكتب معادلتين تمثلان المسألة ثم حلّهما لإيجاد المطلوب .

الحل :

نفرض عدد الأصدقاء الذين دعاهم سجاد $= x$ وعدد الاصدقاء الذين دعاهم أنور $= y$

$x - y = 3 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$

$x + y = 23 \quad \ldots\ldots\ldots(2)$ بالجمع

$2x = 26 \overset{\div 2}{\Rightarrow} x = 13$ شخصا عدد الأشخاص الذين دعاهم سجاد نعوض في معادلة (٢)

$x + y = 23 \Rightarrow 13 + y = 23 \Rightarrow y = 23 - 13 = 10$ شخصا عدد الذين دعاهم أنور

فكر

(24) تحدٍّ : جد مجموعة الحل للنظام في R :

$\frac{2}{6}x - \frac{1}{3}y = 1 \dots\dots (1)$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 3 \dots\dots (2)$

الحل :

$\left[\frac{2}{6}x - \frac{1}{3}y = 1\right] \times 6 \quad \dots\dots (1)$

$\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 3\right] \times 2 \dots\dots (2)$

$\left[\frac{12}{6}x - \frac{6}{3}y = 6\right] \quad \dots\dots (1)$

$\left[\frac{2}{2}x + \frac{2}{2}y = 6\right] \quad \dots\dots (2)$

$1 \times [2x - 2y = 6] \quad \dots\dots (1)$

$2 \times [x + y = 6] \quad \dots\dots (2)$

$2x - 2y = 6 \quad \dots\dots (1)$

$2x + 2y = 12 \quad \dots\dots (2)$ بالجمع

$4x = 18 \Longrightarrow \frac{4x}{4} = \frac{18}{4} \Longrightarrow x = \frac{9}{2}$ نعوض في معادلة (٢)

$x + y = 6 \Longrightarrow \frac{9}{2} + y = 6 \Longrightarrow y = 6 - \frac{9}{2} = \frac{12-9}{2} = \frac{3}{2}$

$S = \{(\frac{9}{2}, \frac{3}{2})\}$

(25) أصحح الخطأ : قال أحمد إن مجموعة حل النظام في R هي المجموعة $\{(\frac{5}{16}, \frac{5}{9})\}$ أكتشف خطأ أحمد وصححه.

$2x + 3y = 6 \quad \dots\dots\dots (1)$

$3x + 2y = 1 \quad \dots\dots\dots (2)$ واجب

أكتب : مجموعة حل النظام في R :

$5x - 6y = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$

$x + 2y = 4 \quad \dots\dots\dots (2)$

الحل :

$1 \times [5x - 6y = 0] \quad \dots\dots\dots (1)$

$5 \times [x + 2y = 4] \quad \dots\dots\dots (2)$

$5x - 6y = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$

$\mp 5x \mp 10y = \mp 20 \dots\dots\dots(2)$ بالطرح

$-16y = -20 \Rightarrow \frac{-16y}{-16} = \frac{-20}{-16} \Rightarrow y = \frac{5}{4}$ نعوض في معادلة (١)

$5x - 6y = 0 \Rightarrow 5x - 6\left(\frac{5}{4}\right) = 0 \Rightarrow 5x - \frac{30}{4} = 0 \Rightarrow 5x = \frac{30}{4} \Rightarrow x = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$

$$S = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)\right\}$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد

فكرة الدرس : حل المعادلة المؤلفة من حدين بتحليل الفرق بين مربعين .

المفردات :

- معادلة
- درجة ثانية
- متغير واحد
- فرق بين مربعين

حل المعادلات بالتحليل فرق بين مربعين

مثال : أكتب معادلة تمثل مساحة اللوحة المربعة ثم حلها لإيجاد طول ضلع اللوحة التي مساحتها تساوي $9\ m^2$.

الحل : أفرض طول ضلع اللوحة هو المتغير x

$\therefore$ مساحة اللوحة هي $x^2 = 9$

$x^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-3) = 0$

أما $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ تهمل لأنه لا يمكن قياس أطوال باشارة سالبة

أو $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

مثال : حل المعادلة التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين وتحقق من صحة الحل :

$16 - y^2 = 0$

الحل :

$16 - y^2 = 0 \Rightarrow (4+y)(4-y) = 0$

أما $4 + y = 0 \Rightarrow y = -4$

أو $4 - y = 0 \Rightarrow -y = -4 \Rightarrow y = 4$

$$S = \{4, -4\}$$

التحقق :

الطرف الأيسر $16 - y^2 \Rightarrow 16 - (\mp 4)^2 \Rightarrow 16 - 16 = 0$ الطرف الأيمن

مثال : حل المعادلات التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين :

1) $4x^2 - 25 = 0 \Rightarrow (2x+5)(2x-5) = 0$

أما $2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-5}{2} \Rightarrow x = \frac{-5}{2}$

أو $2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

$$S = \{\frac{5}{2}, \frac{-5}{2}\}$$

2) $3z^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3(z^2 - 4) = 0 \overset{\div 3}{\Rightarrow} (z^2 - 4) = 0 \Rightarrow (z+2)(z-2) = 0$

أما $z + 2 = 0 \Rightarrow z = -2$

أو $z - 2 = 0 \Rightarrow z = 2$ $\quad S = \{-2, 2\}$

3) $2y^2 - 6 = 0 \overset{\div 2}{\Rightarrow} y^2 - 3 = 0 \Rightarrow (y + \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) = 0$

أما $y + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{3}$

أو $y - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow y = \sqrt{3}$ $\quad S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

4) $(z+1)^2 - 36 = 0 \Rightarrow (z+1+6)(z+1-6) = 0 \Rightarrow (z+7)(z-5) = 0$

أما $z + 7 = 0 \Rightarrow z = -7$

أو $z - 5 = 0 \Rightarrow z = 5$ $\quad S = \{-7, 5\}$

حل المعادلات بخاصية الجذر التربيعي

بصورة عامة اذا كانت a عدد حقيقي موجب فإن

$$\boxed{x^2 = a \Rightarrow x = \mp\sqrt{a}}$$

مثال : حل المعادلة التالية في R باستعمال قاعدة الجذر التربيعي وتحقق من صحة الحل :

$x^2 = 9 \overset{\text{بالجذر التربيعي}}{\Longrightarrow} x = \mp\sqrt{9} \Rightarrow x = \mp 3$

$$S = \{3, -3\}$$

التحقق :

الطرف الايسر $x^2 = (3)^2 = 9$ الطرف الايمن

الطرف الايسر $x^2 = (-3)^2 = -3 \times -3 = 9$ الطرف الايمن

مثال : حل المعادلات التالية في R باستعمال قاعدة الجذر التربيعي :

1) $y^2 = 36 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} y = \mp\sqrt{36} \Rightarrow y = \mp 6$ $\quad S = \{6, -6\}$

2) $z^2 = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{بالجذر}} z = \mp\sqrt{\frac{9}{25}} \Rightarrow z = \mp\frac{3}{5}$ $\quad S = \{\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}\}$

3) $x^2 + 81 = 0 \Longrightarrow x^2 = -81$ لا يوجد لها حل في R

4) $3y^2 = 7 \Longrightarrow \frac{3y^2}{3} = \frac{7}{3} \Longrightarrow y^2 = \frac{7}{3} \xrightarrow{\text{بالجذر}} y = \mp\sqrt{\frac{7}{3}} \Longrightarrow y = \mp\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

$$S = \left\{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right\}$$

5) $4x^2 - 5 = 0 \Longrightarrow 4x^2 = 5 \Longrightarrow \frac{4x^2}{4} = \frac{5}{4} \Longrightarrow x^2 = \frac{5}{4} \xrightarrow{\text{بالجذر}} y = \mp\sqrt{\frac{5}{4}} \Longrightarrow y = \mp\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$S = \left\{\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

ملاحظة : اذا ربعت طرفي معادلة صحيحة فإن المعادلة الناتجة تبقى صحيحة .

$$y = x \xrightarrow{\text{بالتربيع}} y^2 = x^2$$

مثال : حل المعادلات في R :

1) $3\sqrt{x} = 18 \overset{\div 3}{\Rightarrow} \sqrt{x} = 6 \xrightarrow{\text{بالتربيع}} x = 36$ $\quad S = \{36\}$

2) $\sqrt{y+8} = 3 \xrightarrow{\text{بالتربيع}} y + 8 = 9 \Longrightarrow y = 9 - 8 \Longrightarrow y = 1$ $\quad S = \{1\}$

3) $\sqrt{5z} = 7 \xrightarrow{\text{بالتربيع}} 5z = 49 \Longrightarrow \frac{5z}{5} = \frac{49}{5} \Longrightarrow z = \frac{49}{5}$ $\quad S = \left\{\frac{49}{5}\right\}$

4) $\sqrt{\frac{x}{13}} = 1 \xrightarrow{\text{بالتربيع}} \frac{x}{13} = 1 \Longrightarrow \frac{x}{13} = \frac{1}{1} \xrightarrow{\text{طرفين في وسطين}} x = 13$ $\quad S = \{13\}$

تأكد من فهمك

حل المعادلات التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين وتحقق من صحة الحل :

1) $x^2 - 16 = 0$

الحل :

$x^2 - 16 = 0 \Longrightarrow (x+4)(x-4) = 0$

أما $x + 4 = 0 \Longrightarrow x = -4$

أو $x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 4$

$$S = \{-4, 4\}$$

التحقق :

الطرف الأيسر $x^2 - 16 \Longrightarrow (\mp 4)^2 - 16 \Longrightarrow 16 - 16 = 0$ الطرف الأيمن

$2)\ 81 - y^2 = 0$

الحل :

$81 - y^2 = 0 \Rightarrow (9 + y)(9 - y) = 0$

أما $9 + y = 0 \Rightarrow y = -9$

أو $9 - y = 0 \Rightarrow -y = -9 \Rightarrow y = 9$

$$S = \{-9\,, 9\}$$

التحقق :

الطرف الأيسر $81 - y^2 \Rightarrow 81 - (\mp 9)^2 \Rightarrow 81 - 18 = 0$ الطرف الأيمن

$3)\ 2z^2 - 8 = 0$

الحل :

$2z^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2(z^2 - 4) = 0 \overset{\div 2}{\Rightarrow} z^2 - 4 = 0 \Rightarrow (z + 2)(z - 2) = 0$

أما $z + 2 = 0 \Rightarrow z = -2$

أو $z - 2 = 0 \Rightarrow z = 2$

$$S = \{-2\,, 2\}$$

التحقق :

الطرف الأيسر $2z^2 - 8 \Rightarrow 2(\mp 2)^2 - 8 \Rightarrow 2(4) - 8 \Rightarrow 8 - 8 = 0$ الطرف الأيمن

حل المعادلات التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين :

$4)\ 4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (2x + 3)(2x - 3) = 0$

أما $2x + 3 = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-3}{2} \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$

أو $2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$$S = \left\{\frac{-3}{2}\,, \frac{3}{2}\right\}$$

$5)\ 5y^2 - 20 = 0$ واجب

$6)\ (y + 2)^2 - 49 = 0 \Rightarrow (y + 2 + 7)(y + 2 - 7) = 0 \Rightarrow (y + 9)(y - 5) = 0$

أما $y + 9 = 0 \Rightarrow y = -9$

أو $y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5$ $\qquad S = \{-9\,, 5\}$

$7)\ (3 - z)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (3 - z + 1)(3 - z - 1) = 0 \Rightarrow (4 - z)(2 - z) = 0$

أما $4 - z = 0 \Rightarrow -z = -4 \Rightarrow z = 4$

أو $2 - z = 0 \Rightarrow -z = -2 \Rightarrow z = 2$ $\qquad S = \{4\,, 2\}$

$8)\ x^2 - 3 = 0$ واجب



$9)\ y^2-\frac{1}{9}=0 \quad \Rightarrow \left(y+\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)=0$

أما $y+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{3}$

أو $y-\frac{1}{3}=0 \Rightarrow y=\frac{1}{3} \qquad S=\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\}$

حل المعادلات التالية في R باستعمال قاعدة الجذر التربيعي :

$10)\ x^2=64 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x=\mp\sqrt{64} \Rightarrow x=\mp 8 \qquad S=\{8,-8\}$

$11)\ z^2=7 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x=\mp\sqrt{7} \qquad S=\{\sqrt{7},-\sqrt{7}\}$

$12)\ 2y^2=\frac{49}{8}$ واجب

$13)\ 6z^2-5=0 \Rightarrow 6z^2=5 \Rightarrow \frac{6z^2}{6}=\frac{5}{6} \Rightarrow z^2=\frac{5}{6} \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} z=\mp\sqrt{\frac{5}{6}} \Rightarrow z=\mp\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

$$S=\{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}},-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\}$$

$14)\ 4(x^2-12)=33 \Rightarrow 4x^2-48=33 \Rightarrow 4x^2=33+48 \Rightarrow 4x^2=81$

$\frac{4x^2}{4}=\frac{81}{4} \Rightarrow x^2=\frac{81}{4} \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x=\mp\sqrt{\frac{81}{4}} \Rightarrow x=\mp\frac{9}{2} \qquad S=\left\{\frac{9}{2},-\frac{9}{2}\right\}$

$15)\ z^2+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$ واجب

حل المعادلات التالية في R :

$16)\ 3\sqrt{x}=15 \Rightarrow \frac{3\sqrt{x}}{3}=\frac{15}{3} \Rightarrow \sqrt{x}=5 \overset{\text{بالتربيع}}{\Longrightarrow} x=25 \qquad S=\{25\}$

$17)\ \sqrt{y-5}=0$ واجب

$18)\ \sqrt{2z}=6 \overset{\text{بالتربيع}}{\Longrightarrow} 2z=36 \Rightarrow \frac{2z}{2}=\frac{36}{2} \Rightarrow z=18 \qquad S=\{18\}$

تدرب وحل التمرينات

حل المعادلات التالية في R وتحقق من صحة الحل :

$19)\ x^2=49 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x=\mp\sqrt{49} \Rightarrow x=\mp 7 \qquad S=\{7,-7\}$

التحقق :

الطرف الأيسر $x^2 \Rightarrow (7)^2 \Rightarrow 49$ الطرف الأيمن

$20)\ 5y^2-10=0$

الحل :

$5(y^2-2)=0 \overset{\div 5}{\Rightarrow} y^2-2=0 \Rightarrow (y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2})=0$

أما $y + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow z = -\sqrt{2}$

أو $y + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow z = \sqrt{2}$

$$S = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

التحقق :

الطرف الأيمن $5y^2 - 10 \Rightarrow 5(\mp\sqrt{2})^2 - 10 \Rightarrow 5(2) - 10 \Rightarrow 10 - 10 = 0$ الطرف الأيسر

$21)\ 3z^2 - 27 = 0$ واجب

حل المعادلات التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين :

$22)\ 9x^2 - 36 = 0 \Rightarrow (3x+6)(3x-6) = 0$

أما $3x + 6 = 0 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{-6}{3} \Rightarrow x = -2$

أو $3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \Rightarrow x = 2$

$$S = \{-2, 2\}$$

$23)\ 7y^2 - 28 = 0$ واجب

$24)\ 9(x^2 - 1) - 7 = 0 \Rightarrow 9x^2 - 9 - 7 = 0$

$$9x^2 - 16 = 0 \Rightarrow (3x+4)(3x-4) = 0$$

أما $3x + 4 = 0 \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{-4}{3} \Rightarrow x = \frac{-4}{3}$

أو $3x - 4 = 0 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

$$S = \left\{\frac{-4}{3}, \frac{4}{3}\right\}$$

$25)\ (y+5)^2 - 64 = 0$ واجب

$26)\ x^2 - 2 = 0$ واجب

$27)\ y^2 - \frac{1}{36} = 0 \Rightarrow \left(y + \frac{1}{6}\right)\left(y - \frac{1}{6}\right) = 0$

أما $y + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{6}$

أما $y - \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{6}$

$$S = \left\{-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right\}$$

حل المعادلات التالية في R باستعمال قاعدة الجذر التربيعي :

$28)\ x^2 = 121 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x = \mp\sqrt{121} \Rightarrow x = \mp 11 \qquad S = \{11, -11\}$

$29)\ 50 - 2y^2 = 0 \Rightarrow -2y^2 = -50 \Rightarrow 2y^2 = 50 \Rightarrow \frac{2y^2}{2} = \frac{50}{2} \Rightarrow y^2 = 25$

$$y^2 = 25 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} y = \mp\sqrt{25} \Rightarrow y = \mp 5 \qquad S = \{5, -5\}$$

$30)\ x^2 = \frac{1}{64}$ واجب

$31)\ 3y^2 = \frac{25}{3} \Rightarrow \frac{3y^2}{1} = \frac{25}{3} \xrightarrow{\text{طرفين في وسطين}} 9y^2 = 25 \Rightarrow \frac{9y^2}{9} = \frac{25}{9}$

$$y^2 = \frac{25}{9} \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} y = \mp\sqrt{\frac{25}{9}} \Rightarrow y = \mp\frac{5}{3}$$

$$S = \{\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\}$$

$32)\ 7(x^2 - 2) = 50$ واجب

حل المعادلات في R :

$33)\ 6\sqrt{x} = 30$ واجب

$34)\ \sqrt{y - 9} = 4 \overset{\text{بالتربيع}}{\Longrightarrow} y - 9 = 16 \Rightarrow y = 16 + 9 \Rightarrow y = 25$ $S = \{25\}$

$35)\ \sqrt{4z} = 8$ واجب

تدرب وحل مسائل حياتية

(36) موكيت سجاد : قطعة موكيت سجاد مستطيلة طولها $12\ m$ وعرضها $3\ m$ قطعت الى أجزاء لتغطية أرضية غرفة مربعة الشكل . ما طول ضلع الغرفة ؟



الحل :

$3 \times 12 = 36\ m^2$ مساحة الموكيت المستطيلة الشكل

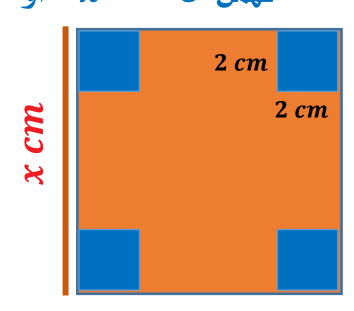
نفرض طول ضلع الغرفة المربعة $x =$

$$x^2 = 36 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x = \mp\sqrt{36} \Rightarrow x = \mp 6$$

أما $x = 6m$

أو $x = -6$ تهمل

(37) هندسة : قطعة كارتون مربعة الشكل طول ضلعها $x\ cm$ ، قطعت أربعة مربعات متساوية من زواياها طول ضلع كل مربع $2\ cm$ ، وثنيت لتكون صندوقا دون غطاء على شكل متوازي سطوح مستطيلة حجمه $32\ cm^2$. جد طول ضلع قطعة الكارتون الأصلية .



الحل :

$x - 2 - 2 = x - 4$ طول ضلع القاعدة

الحجم = مساحة القاعدة المربعة × الارتفاع

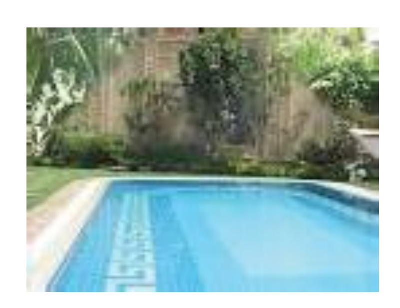
$$[(x - 4)^2 . 2 = 32\ ] \div 2$$

$$(x - 4)^2 = 16 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x - 4 = \mp\sqrt{16} \Rightarrow x - 4 = \mp 4$$

أما $x - 4 = 4 \Rightarrow x = 4 + 4 = 8\ cm$

أو $x - 4 = -4 \Rightarrow x = -4 + 4 = 0$ يهمل





(38) نافورة : صمم حوض سباحة مربع الشكل طول ضلعه $3\ m$ في منتصف حديقة مربعة الشكل ، فكانت المساحة المتبقية من الحديقة والمحيطة بالحوض $40\ m^2$ ، فما طول ضلع الحديقة ؟

الحل :

نفرض طول ضلع الحديقة $= x$ اذن مساحة الحديقة $= x^2$

ومساحة الحوض $= 3^2$

$$x^2 - 3^2 = 40 \Rightarrow x^2 - 9 = 40 \Rightarrow x^2 = 40 + 9 \Rightarrow x^2 = 49 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x = \mp\sqrt{49}$$

$x = \mp 7 \Rightarrow x = 7 \quad , \quad x = -7$ تهمل

فكر

(39) تحدٍّ : حل المعادلات التالية في R :

$i)\ 9(x^2 + 1) = 34$

الحل :

$$9(x^2 + 1) = 34 \Rightarrow 9x^2 + 9 = 34 \Rightarrow 9x^2 = 34 - 9 \Rightarrow 9x^2 = 25$$

$$\frac{9x^2}{9} = \frac{25}{9} \Rightarrow x^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow x = \mp\sqrt{\frac{25}{9}} \Rightarrow x = \mp\frac{5}{3} \qquad S = \left\{\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right\}$$

$ii)\ 4x^2 - 3 = 0$

الحل :

$$4x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 3 \Rightarrow \frac{4x^2}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x = \mp\sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow x = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

(40) هل المجموعة المعطاة تمثل مجموعة الحل للمعادلة أم لا ؟

$i)\ (2y + 1)^2 = 16 \quad , \quad \left\{\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right\}$

الحل :

$(2y + 1)^2 = 16$

$$(2y + 1)^2 = 16 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} 2y + 1 = \mp\sqrt{16} \Rightarrow 2y + 1 = \mp 4$$

أما $2y + 1 = 4 \Rightarrow 2y = 4 - 1 \Rightarrow 2y = 3 \Rightarrow \frac{2y}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

أو $2y + 1 = -4 \Rightarrow 2y = -4 - 1 \Rightarrow 2y = -5 \Rightarrow \frac{2y}{2} = \frac{-5}{2} \Rightarrow y = \frac{-5}{2}$

لا تمثل مجموعة حل المعادلة

$ii)\ 3x^2 - 7 = 0 \quad , \quad \left\{\frac{7}{\sqrt{3}}, -\frac{7}{\sqrt{3}}\right\}$

الحل :

$$3x^2 - 7 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 7 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{7}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{7}{3} \xrightarrow{\text{بالجذر}} x = \mp\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

لا تمثل مجموعة حل المعادلة

41) أصحح الخطأ : قال صلاح إن المجموعة $\{\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\}$ تمثل مجموعة الحل للمعادلة $5x^2 = 4$ أكتشف خطأ صلاح وصححه .

الحل :

$$5x^2 = 4 \Rightarrow \frac{5x^2}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{بالجذر}} x = \mp\sqrt{\frac{4}{5}} \Rightarrow x = \mp\frac{2}{\sqrt{5}}$$

الخطأ هو العدد الموجود في البسط $\{\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\}$

42) حس عددي : عدد صحيح موجب من رقم واحد لو أنقص من مربعه واحد لكان الناتج عدد من مضاعفات العشرة . ما العدد ؟

الحل : نفرض العدد $= x$

مربعه $= x^2$

$x^2 - 1 =$ مضاعفات العشرة

$x^2 =$ مضاعفات العشرة $+ 1$ بالجذر

$x = \pm\sqrt{\text{مضاعفات العشرة} + 1}$

$x = \pm\sqrt{80 + 1} = \pm\sqrt{81} = \pm 9$

$x = 9 \quad , \quad x = -9$ تهمل

العدد الذي مربعه مضاعفات العشرة $+ 1$ هو 9 ومربعه 81

أكتب : مجموعة الحل للمعادلة

$$(8 - 3y)^2 - 1 = 0$$

الحل :

$(8 - 3y)^2 - 1 = 0$

$(8 - 3y)^2 = 1$ بالجذر

$8 - 3y = \mp 1$

أما $8 - 3y = 1 \Rightarrow -3y = 1 - 8 \Rightarrow -3y = -7 \Rightarrow \frac{-3y}{-3} = \frac{-7}{-3} \Rightarrow y = \frac{7}{3}$

أو $8 - 3y = -1 \Rightarrow -3y = -1 - 8 \Rightarrow -3y = -9 \Rightarrow \frac{-3y}{-3} = \frac{-9}{-3} \Rightarrow y = 3$

حل المعادلات التربيعية بالتجربة

أولاً : حل المعادلة التي تكون بالشكل $x^2 + bx + c = 0$

مثال : اذا كان طول ملعب كرة السلة يزيد بمقدارا $2\ m$ على ضعف عرضه ومساحته $480m^2$ فما بعدي الملعب ؟

الحل : نفرض عرض الملعب $= x$

نفرض طول الملعب $= 2x + 2$

مساحة الملعب = الطول × العرض

$x\,(2x + 2) = 480$

$[2x^2 + 2x = 480\,] \div 2$

$x^2 + x = 240 \Rightarrow x^2 + x - 240 = 0 \Rightarrow (x + 16)(x - 15) = 0$

أما $x + 16 = 0 \Rightarrow x = -16$ تهمل

أو $x - 15 = 0 \Rightarrow x = 15\ m$ العرض

الطول $= 2x + 2 = 2(15) + 2 = 30 + 2 = 32\ m$

مثال : حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

$1)\ x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 4) = 0$

أما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

أو $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ $\quad S = \{3\,,4\}$

$2)\ y^2 + 8y + 15 = 0 \Rightarrow (y + 5)(y + 3) = 0$

أما $y + 5 = 0 \Rightarrow y = -5$

أو $y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3$ $\quad S = \{-5\,,-3\}$

$3)\ z^2 + z - 30 = 0 \Rightarrow (z + 6)(z - 5) = 0$

أما $z + 6 = 0 \Rightarrow z = -6$

أو $z - 5 = 0 \Rightarrow z = 5$ $\quad S = \{-6\,,5\}$

$4)\ x^2 - 2x - 63 = 0 \Rightarrow (x - 9)(x + 7) = 0$

أما $x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$

أو $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$ $\quad S = \{9\,,-7\}$

(5) ما العدد الذي مربعه يزيد عليه بمقدار 12 ؟

الحل : نفرض العدد $= x$

مربع العدد $= x^2$

$x^2 - x = 12 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 3) = 0$

أما $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

أو $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

ثانيا : حل المعادلة التي تكون بالشكل $ax^2 + bx + c = 0$

مثال : مسبح يقل طوله عن ثلاثة أمثال عرضه بمقدار $1\ m$. فإذا كانت مساحة المسبح $140\ m^2$ ، جد أبعاده .

الحل : نفرض عرض المسبح $= x$

نفرض طول المسبح $= 3x - 1$

مساحة المسبح = الطول × العرض

$(3x - 1)x = 140$

$3x^2 - x = 140 \Rightarrow 3x^2 - x - 140 = 0 \Rightarrow (3x + 20)(x - 7) = 0$

إما $3x + 20 = 0 \Rightarrow 3x = -20 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{-20}{3} \Rightarrow x = \frac{-20}{3}$ تهمل

أو $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$ العرض

الطول $3x - 1 = 3(7) - 1 = 21 - 1 = 20$

مثال : حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

1) $4y^2 - 14y + 6 = 0 \Rightarrow (4y - 2)(y - 3) = 0$

إما $4y - 2 = 0 \Rightarrow 4y = 2 \Rightarrow \frac{4y}{4} = \frac{2}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

أو $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \qquad S = \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$

2) $3x^2 + 18x - 21 = 0 \Rightarrow (x + 7)(3x - 3) = 0$

إما $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$

أو $3x - 3 = 0 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x = 1 \qquad S = \{-7, 1\}$

3) $20 + 13z + 2z^2 = 0 \Rightarrow (4 + z)(5 + 2z) = 0$

إما $4 + z = 0 \Rightarrow z = -4$

أو $5 + 2z = 0 \Rightarrow 2z = -5 \Rightarrow \frac{2z}{2} = \frac{-5}{2} \Rightarrow z = \frac{-5}{2} \qquad S = \left\{-4, \frac{-5}{2}\right\}$

4) $9x^2 - 69x - 24 = 0 \Rightarrow 3(3x^2 - 23x - 8) = 0 \overset{\div 3}{\Rightarrow} 3x^2 - 23x - 8 = 0$

$3x^2 - 23x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 8)(3x + 1) = 0$

إما $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

أو $3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{-1}{3} \Rightarrow x = \frac{-1}{3} \qquad S = \left\{8, \frac{-1}{3}\right\}$

تأكد من فهمك

حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

1) $x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x - 3) = 0$

إما $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$

أو $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \qquad S = \{6, 3\}$

$2)\ x^2 - 4x - 32 = 0 \Rightarrow (x-8)(x+4) = 0$

أما $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

أو $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$ $\quad S = \{8, -4\}$

$3)\ y^2 + 48y - 49 = 0 \Rightarrow (y+49)(y-1) = 0$

أما $y + 49 = 0 \Rightarrow y = -49$

أو $y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$ $\quad S = \{-49, 1\}$

$4)\ y^2 + 9y - 36 = 0 \Rightarrow (y+12)(y-3) = 0$

أما $y + 12 = 0 \Rightarrow y = -12$

أو $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$ $\quad S = \{-12, 3\}$

$5)\ x^2 - 3x + 2 = 0$ واجب

$6)\ y^2 - 8y - 33 = 0 \Rightarrow (y-11)(y+3) = 0$

أما $y - 11 = 0 \Rightarrow y = 11$

أو $y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3$ $\quad S = \{11, -3\}$

7) ما العدد الذي مربعه يزيد على ضعفه بمقدار 35 ؟

الحل : نفرض العدد $= x$

مربع العدد $= x^2$

$x^2 - 2x = 35 \Rightarrow x^2 - 2x - 35 = 0 \Rightarrow (x-7)(x+5) = 0$

أما $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

أو $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

8) ما العدد الذي لو أضيف 4 أمثاله الى مربعه لكان الناتج 45 ؟

الحل : نفرض العدد $= x$

أربعة أمثاله $= 4x$

مربع العدد $= x^2$

$x^2 + 4x = 45 \Rightarrow x^2 + 4x - 45 = 0 \Rightarrow (x+9)(x-5) = 0$

أما $x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$

أو $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

9) سجادة طولها يزيد على عرضها بمقدار $2\ m$ ومساحتها $48\ m^2$ ، ما أبعاد السجادة ؟

الحل : نفرض عرض السجادة $= x$

نفرض طول السجادة $= x + 2$

مساحة السجادة = الطول × العرض

$(x+2)x = 48 \Rightarrow x^2 + 2x = 48 \Rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0 \Rightarrow (x+8)(x-6) = 0$

أما $x+8=0 \Rightarrow x=-8$ تهمل

أو $x-6=0 \Rightarrow x=6$ العرض

الطول $x+2=6+2=8$

حل المعادلات الآتية في R :

10) $15x^2-11x-14=0 \Rightarrow (5x-7)(3x+2)=0$

أما $5x-7=0 \Rightarrow 5x=7 \Rightarrow \frac{5x}{5}=\frac{7}{5} \Rightarrow x=\frac{7}{5}$

أو $3x+2=0 \Rightarrow 3x=-2 \Rightarrow \frac{3x}{3}=\frac{-2}{3} \Rightarrow x=\frac{-2}{3}$ $\qquad s=\left\{\frac{7}{5}, \frac{-2}{3}\right\}$

11) $6+7x-5x^2=0 \Rightarrow (3+5x)(2-x)=0$

أما $3+5x=0 \Rightarrow 5x=-3 \Rightarrow \frac{5x}{5}=\frac{-3}{5} \Rightarrow x=\frac{-3}{5}$

أو $2-x=0 \Rightarrow -x=-2 \Rightarrow x=2$ $\qquad s=\left\{\frac{-3}{5}, 2\right\}$

12) $42+64y+24y^2=0$ واجب

13) $36-75x+6x^2=0$ واجب

14) $70-33y+2y^2=0 \Rightarrow (14-y)(5+2y)=0$

أما $14-y=0 \Rightarrow -y=-14 \Rightarrow y=14$

أو $5+2y=0 \Rightarrow 2y=-5 \Rightarrow \frac{2y}{2}=\frac{-5}{2} \Rightarrow y=\frac{-5}{2}$ $\qquad s=\left\{14, \frac{-5}{2}\right\}$

15) ارض مستطيلة الشكل يزيد طولها بمقدار $4\ m$ على عرضها ما بعدا الارض اذا كانت مساحتها $60\ m^2$؟

الحل : نفرض عرض الارض $= x$

نفرض طول الارض $= x+4$

مساحة الارض = الطول × العرض

$(x+4)\,x=60 \Rightarrow x^2+4x=60 \Rightarrow x^2+4x-60=0 \Rightarrow (x+10)(x-6)=0$

أما $x+10=0 \Rightarrow x=-10$ تهمل

أو $x-6=0 \Rightarrow x=6\ m$ العرض

الطول $x+4=6+4=10m$

تدرب وحل التمرينات

حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

16) $x^2-15x+56=0 \Rightarrow (x-7)(x-8)=0$

أما $x-7=0 \Rightarrow x=7$

أو $x-8=0 \Rightarrow x=8$ $\qquad S=\{7, 8\}$

$17)\ y^2+16y+63=0$ واجب

$18)\ x^2+15x-16=0$ واجب

$19)\ y^2-y-42=0$ واجب

$20)\ x^2-4x+3=0$ واجب

$21)\ y^2-6y-55=0 \Rightarrow (y-11)(y+5)=0$

أما $y-11=0 \Rightarrow y=11$

أو $y+5=0 \Rightarrow y=-5$ $\quad S=\{11,-5\}$

22) قطعة من معدن مستطيلة الشكل ينقص عرضها بمقدار $2m$ عن طولها . ما بعدا القطعة المعدنية اذا كانت مساحتها $24m^2$ ؟ واجب

$23)\ 12x^2-20x+7=0 \Rightarrow (6x-7)(2x-1)=0$

أما $6x-7=0 \Rightarrow 6x=7 \Rightarrow \frac{6x}{6}=\frac{7}{6} \Rightarrow x=\frac{7}{6}$

أو $2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ $\quad S=\left\{\frac{7}{6},\frac{1}{2}\right\}$

$24)\ 28+2z-8z^2=0$ واجب

$25)\ 81-9x-12x^2=0 \Rightarrow (9-4x)(9+3x)=0$

أما $9-4x=0 \Rightarrow -4x=-9 \Rightarrow \frac{-4x}{-4}=\frac{-9}{-4} \Rightarrow x=\frac{9}{4}$

أو $9+3x=0 \Rightarrow 3x=-9 \Rightarrow \frac{3x}{3}=\frac{-9}{3} \Rightarrow x=-3$ $\quad S=\left\{\frac{9}{4},-3\right\}$

$26)\ 50z^2+10z-4=0$ واجب

27) صالة طعام ينقص طولها عن مثلي عرضها بمقدار $3\ m$ ومساحتها $54m^2$. ما أبعاد الصالة ؟ واجب

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية في R وتحقق من صحة الحل :

$28)\ x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x-3)(x-1)=0$

أما $x-3=0 \Rightarrow x=3$

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1$ $\quad S=\{3,\ 1\}$

الطرف الايسر $x^2-4x+3 \Rightarrow (3)^2-4(3)+3 \Rightarrow 9-12+3=0$ الطرف الايمن

$29)\ y^2-9y-36=0$ واجب

$28)\ 4-26x+12x^2=0 \Rightarrow (4-2x)(1-6x)=0$

أما $4-2x=0 \Rightarrow -2x=-4 \Rightarrow \frac{-2x}{-2}=\frac{-4}{-2} \Rightarrow x=2$

أو $1-6x=0 \Rightarrow -6x=-1 \Rightarrow \frac{-6x}{-6}=\frac{-1}{-6} \Rightarrow x=\frac{1}{6}$ $\quad S=\left\{2,\frac{1}{6}\right\}$

الطرف الايسر $4-26x+12x^2 \Rightarrow 4-26(2)+12(2)^2 \Rightarrow 4-52+48=0$ الطرف الايمن

تدرب وحل مسائل حياتية



32) رياضة : اذا كان طول صورة ملعب كرة القدم يزيد بمقدار $4m$ على ضعف عرضها ، فما بعدا الصورة اذا كانت مساحتها $160m^2$ ؟

الحل :

نفرض العرض للملعب $= x$ ، ضعف العرض للملعب $= 2x$

نفرض الطول للملعب $= 2x + 4$

مساحة صورة الملعب = الطول × العرض

$$(2x+4)x = 160 \Rightarrow 2x^2 + 4x = 160 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 160 = 0 \overset{\div 2}{\Rightarrow}$$

$$x^2 + 2x - 80 = 0 \Rightarrow (x+10)(x-8) = 0$$

أما $x + 10 = 0 \Rightarrow x = -10$ تهمل

أو $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8\,m$ العرض

الطول $2x + 4 = 2(8) + 4 = 16 + 4 = 20\,m$



33) حقل نعام : اذا كان طول حقل لتربية طيور النعام يقل بمقدار $4m$ عن ضعف عرضه ، فإذا كانت مساحة الحقل $96m^2$ ، فهل يكفي سياج طوله $44m$ لتحويط الحقل ؟

الحل :

نفرض عرض الحقل $= x$ ، ضعف العرض $= 2x$

الطول للملعب $= 2x - 4$

مساحة الحقل = الطول × العرض

$$(2x-4)\,x = 96 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 96 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 96 = 0 \overset{\div 2}{\Rightarrow}$$

$$x^2 - 2x - 48 = 0 \Rightarrow (x-8)(x+6) = 0$$

أما $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8\,m$ العرض

أو $x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$ تهمل

الطول $2x - 4 = 2(8) - 4 = 16 - 4 = 12\,m$

نجد المحيط للحقل

$$P = 2\left(\text{العرض} + \text{الطول}\right) = 2(12+8) = 2(20) = 40\,m$$



34) إطار صورة : أشترى سامر إطار لصورة طوله ضعف عرضه . يحتاج سامر الى تصغير الإطار بمقدار $2cm$ من طوله وعرضه ليصبح مناسبا للصورة ، فما أبعاد الإطار الذي اشتراه سامر ، اذا كانت مساحة الصورة $40m^2$ ؟

الحل :

نفرض العرض للاطار $= x$ ، العرض الجديد $= x - 2$

الطول الجديد $= 2x - 2$

مساحة الاطار بعد التصغير = الطول × العرض

$$(2x-2)(x-2) = 40 \Longrightarrow 2x^2 - 4x - 2x + 4 = 40 \Longrightarrow 2x^2 - 6x + 4 - 40 = 0$$

$$2x^2 - 6x - 36 = 0 \overset{\div 2}{\Rightarrow} x^2 - 3x - 18 = 0 \Longrightarrow (x-6)(x+3) = 0$$

أما $x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 6\ m$ العرض

الطول $2x = 2(6) = 12\ m$

أو $x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -3$ تهمل

فكر

35) تحدٍّ: حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة :

$i)\ (x-3)(x+2) = 14 \Longrightarrow x^2 + 2x - 3x - 6 = 14 \Longrightarrow x^2 - x - 6 - 14 = 0$

$x^2 - x - 20 = 0 \Longrightarrow (x-5)(x+4) = 0$

أما $x - 5 = 0 \Longrightarrow x = 5$

أو $x + 4 = 0 \Longrightarrow x = -4$ $\qquad S = \{5, -4\}$

$ii)\ 3y^2 - 11y + 10 = 80 \Longrightarrow 3y^2 - 11y + 10 - 80 = 0$

$3y^2 - 11y - 70 = 0 \Longrightarrow (y-7)(3y+10) = 0$

أما $y - 7 = 0 \Longrightarrow y = 7$

أو $3y + 10 = 0 \Longrightarrow \frac{3y}{3} = \frac{-10}{3} \Longrightarrow y = \frac{-10}{3}$ $\qquad S = \{7, \frac{-10}{3}\}$

36) وضِّح : هل أن المجموعة المعطاة تمثل مجموعة حل للمعادلة أم لا ؟

$i)\ 4x^2 + 2x = 30 \quad , \quad \left\{\frac{-2}{5}, 3\right\}$

الحل :

$$4x^2 + 2x = 30 \Longrightarrow 4x^2 + 2x - 30 = 0 \Longrightarrow (2x+6)(2x-5) = 0$$

أما $2x + 6 = 0 \Longrightarrow 2x = -6 \Longrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-6}{2} \Longrightarrow x = -3$

أو $2x - 5 = 0 \implies 2x = 5 \implies \frac{2x}{2} = \frac{5}{2} \implies x = \frac{5}{2}$ $\quad S = \{-3 , \frac{5}{2}\}$

لا تمثل مجموعة الحل اعلاه حلاً للمعادلة

$ii)\ 42 - 33y + 6y^2 = 0 \quad , \quad \left\{2 \ , \ \frac{5}{2}\right\}$ واجب

37) أصحح الخطأ : قالت رنا إن مجموعة الحل للمعادلة $2x^2 - 34x + 60 = 0$ هي $\{15 , 3\}$.

أُحدِّد خطأ رنا وأصحِّحه.

الحل :

$$2x^2 - 34x + 60 = 0 \implies (2x - 4)(x - 15) = 0$$

أما $2x - 4 = 0 \implies 2x = 4 \implies \frac{2x}{2} = \frac{4}{2} \implies x = 2$

أو $x - 15 = 0 \implies x = 15$ $\quad S = \{2 , 15\}$

الخطأ في مجموعة الحل هو العدد 3 .

أكتب : معادلة تمثل المسألة التالية ثم جد حلها : ما العدد الذي ينقص ضعفه عن مربعه بمقدار 35 ؟

الحل : نفرض العدد $= x$

ضعفه $= 2x$

مربعه $= x^2$

$$x^2 - 2x = 35 \implies x^2 - 2x - 35 = 0 \implies (x - 7)(x + 5) = 0$$

أما $x - 7 = 0 \implies x = 7$

أو $x + 5 = 0 \implies x = -5$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل :

فكرة الدرس : حل المعادلات التربيعية بطريقة اكمال المربع .

المفردات :

- الحد الأول
- الحد الاخير
- مربع كامل
- اكمال المربع

حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل

المربع الكامل : سبق وقد تم معرفة هذا النوع من الحدوديات التي تمثل حدودية من ثلاثة حدود حيث يكون فيها الحد الأول والاخير مربعات كاملة وتكون اشارة الحد الاخير دائما موجبة .

مثال : تمثل المعادلة $x^2 - 20x + 100 = 0$ مساحة المنطقة المربعة المحددة (للجاكور) بالمتر المربع في حديقة الحيوانات ، ما المقدار الذي يمثله طول ضلع المنطقة المربعة ؟

الحل :

$$x^2 - 20x + 100 = 0$$

$$(x-10)(x-10) = 0 \Rightarrow (x-10)^2 = 0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x - 10 = 0 \Rightarrow x = 10$$

طول ضلع المنطقة المربعة المخصصة للنمر وهي $10\ m$

مثال : حل المعادلات التالية في R بالمربع الكامل :

1) $4x^2 + 20x + 25 = 0 \Rightarrow (2x+5)(2x+5) = 0 \Rightarrow (2x+5)^2 = 0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} 2x + 5 = 0$

$2x = -5 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-5}{2} \Rightarrow x = \frac{-5}{2}$ $\quad S = \left\{\frac{-5}{2}\right\}$

2) $y^2 - y + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} y - \frac{1}{2} = 0$

$y = \frac{1}{2}$ $\quad S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

3) $3 - 6\sqrt{3}z + 9z^2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{3} - 3z)(\sqrt{3} - 3z) = 0 \Rightarrow (\sqrt{3} - 3z)^2 = 0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow}$

$\sqrt{3} - 3z = 0 \Rightarrow -3z = -\sqrt{3} \Rightarrow \frac{-3z}{-3} = \frac{-\sqrt{3}}{-3} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

$ax^2 + bx + c = 0$ سوف نتعرف الى كيفية حل هذا النوع من المعادلات بطريقة إكمال المربع :

- نضع المعادلة التربيعية بالصورة $ax^2 + bx = -c$ حيث $a \neq 0$.
- اذا كان $a \neq 1$ سنقسم المعادلة على a اي (معامل x^2) .
- نضيف الى طرفي المعادلة المقدار $[\frac{1}{2} \cdot x \text{ معامل}]^2$.
- نحلل الطرف الايسر الذي أصبح مربعا كاملاً بعد الخطوة (3) وبسط الطرف الأيمن .
- نأخذ الجذر التربيعي للطرفين ونجد قيم x .

مثال : حل المعادلات التالية بطريقة إكمال المربع :

1) $x^2 - 4x - 12 = 0$

الحل :

- $x^2 - 4x = 12$
- معامل x^2 يساوي واحد

- نضيفها للطرفين $\left[\frac{1}{2}\ .\ x \text{ معامل}\right]^2 = \left[\frac{1}{2}.(-4)\right]^2 = (-2)^2 = 4$

$x^2 - 4x + 4 = 12 + 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 16$

- $(x-2)(x-2) = 16$
- $(x-2)^2 = 16 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x - 2 = \mp\sqrt{16} \Rightarrow x - 2 = \mp 4$

أما $x - 2 = 4 \;\Rightarrow x = 4 + 2 = 6$

أو $x - 2 = -4 \;\Rightarrow x = -4 + 2 = -2$ $\qquad S = \{6\,, -2\}$

2) $2y^2 - 3 = 3y$

الحل :

- $2y^2 - 3y = 3$
- نقسم المعادلة على معامل y^2

$$2y^2 - 3y = 3 \Rightarrow \frac{2y^2}{2} - \frac{3y}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow y^2 - \frac{3y}{2} = \frac{3}{2}$$

- نضيفها للطرفين $\left[\frac{1}{2}\ .\ y \text{ معامل}\right]^2 = \left[\frac{1}{2}.\left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

$$y^2 - \frac{3y}{2} + \frac{9}{16} = \frac{3}{2} + \frac{9}{16} \Rightarrow y^2 - \frac{3y}{2} + \frac{9}{16} = \frac{24+9}{16} \Rightarrow y^2 - \frac{3y}{2} + \frac{9}{16} = \frac{33}{16}$$

- $y^2 - \frac{3y}{2} + \frac{9}{16} = \frac{33}{16} \Rightarrow \left(y - \frac{3}{4}\right)\left(y - \frac{3}{4}\right) = \frac{33}{16}$
- $\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{33}{16} \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} y - \frac{3}{4} = \mp\sqrt{\frac{33}{16}} \Rightarrow y - \frac{3}{4} = \mp\frac{\sqrt{33}}{4}$

أما $y - \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{33}}{4} \;\Rightarrow y = \frac{\sqrt{33}}{4} + \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{33}+3}{4}$

أو $y - \frac{3}{4} = -\frac{\sqrt{33}}{4} \;\Rightarrow y = -\frac{\sqrt{33}}{4} + \frac{3}{4} = \frac{-\sqrt{33}+3}{4}$ $\qquad S = \left\{\frac{\sqrt{33}+3}{4}\,, \frac{-\sqrt{33}+3}{4}\right\}$

مثال : مستطيل يزيد طوله على عرضه بمقدار $2\ cm$ ، قدّر طول المستطيل وعرضه بالتقريب لأقرب عدد صحيح اذا كانت مساحته $36\ cm^2$.

الحل : نفرض عرض المستطيل $= x$

نفرض طول المستطيل $= x + 2$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$(x+2).x = 36 \;\Rightarrow x^2 + 2x = 36 \Rightarrow x^2 + 2x - 36 = 0$

لا تحل بالتجربة وتحل باكمال المربع $(x^2 + 2x - 36 = 0)$.

- $x^2 + 2x = 36$
- معامل x^2 يساوي واحد
- نضيفها للطرفين $\left[\frac{1}{2}\ .\ x \text{ معامل}\right]^2 = \left[\frac{1}{2}.(2)\right]^2 = (1)^2 = 1$

$x^2 + 2x + 1 = 36 + 1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 37$

- $x^2 + 2x + 1 = 37 \Longrightarrow (x+1)(x+1) = 37$

- $(x+1)^2 = 37 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x+1 = \mp\sqrt{37}$

$\sqrt{37} \approx \sqrt{36}$

$x+1 \approx \mp\sqrt{36} \Rightarrow x+1 \approx \mp 6$

العرض $\qquad$ أما $x+1 \approx 6 \Rightarrow x \approx 6-1 \approx 5$

تهمل $\qquad$ أما $x+1 \approx -6 \Rightarrow x \approx -6-1 \approx -7$

الطول $x+2 \approx 5+2 \approx 7$

تأكد من فهمك

حل المعادلات التالية في R بالمربع الكامل :

1) $x^2+12x+36=0 \Rightarrow (x+6)(x+6)=0 \Rightarrow (x+6)^2=0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x+6=0$

$\Rightarrow x=-6 \qquad S=\{-6\}$

2) $y^2-10y+25=0$ واجب

3) $4x^2-4x+1=0 \Rightarrow (2x-1)(2x-1)=0 \Rightarrow (2x-1)^2=0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} 2x-1=0$

$\Rightarrow 2x=1 \Rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2} \qquad S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

4) $y^2+2\sqrt{7}y+7=0 \Rightarrow (y+\sqrt{7})(y+\sqrt{7})=0 \Rightarrow (y+\sqrt{7})^2=0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} y+\sqrt{7}=0$

$\Rightarrow y=-\sqrt{7} \qquad S=\{-\sqrt{7}\}$

5) $x^2+16x=-64 \Rightarrow x^2+16x+64=0 \Rightarrow (x+8)(x+8)=0$

$(x+8)^2=0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x+8=0 \Rightarrow x=-8 \qquad S=\{-8\}$

6) $\frac{1}{16}-\frac{1}{2}x+x^2=0$ واجب

حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع :

7) $x^2-10x-24=0$

- $x^2-10x=24$
- معامل x^2 يساوي واحد
- نضيفها للطرفين $\left[\frac{1}{2}\,.\,\text{معامل } x\right]^2 = \left[\frac{1}{2}.(-10)\right]^2 = (-5)^2 = 25$

$x^2-10x+25=24+25 \Rightarrow x^2-10x+25=49$

- $(x-5)(x-5)=49$
- $(x-5)^2=49 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x-5=\mp\sqrt{49} \Rightarrow x-5=\mp 7$

أما $x-5=7 \Rightarrow x=7+5=12$

أو $x-5=-7 \Rightarrow x=-7+5=-2 \qquad S=\{12,-2\}$



$8)\ y^2 - 3 = 2y$ واجب

$9)\ 4x^2 - 3x - 16 = 0$

الحل :

- $4x^2 - 3x = 16$
- نقسم على معامل x^2 $\quad 4x^2 - 3x = 16 \Longrightarrow \frac{4x^2}{4} - \frac{3x}{4} = \frac{16}{4} \Longrightarrow x^2 - \frac{3x}{4} = 4$
- نضيفها للطرفين $\quad \left[\frac{1}{2} \,.\, x \text{ معامل}\right]^2 = \left[\frac{1}{2} \,.\left(-\frac{3}{4}\right)\right]^2 = \left(-\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$

$$x^2 - \frac{3x}{4} + \frac{9}{64} = 4 + \frac{9}{64} \Longrightarrow x^2 - \frac{3x}{4} + \frac{9}{64} = \frac{256+9}{64} \Longrightarrow x^2 - \frac{3x}{4} + \frac{9}{64} = \frac{265}{64}$$

- $x^2 - \frac{3x}{4} + \frac{9}{64} = \frac{265}{64} \Longrightarrow \left(x - \frac{3}{8}\right)\left(x - \frac{3}{8}\right) = \frac{265}{64}$
- $\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{265}{64} \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x - \frac{3}{8} = \mp\sqrt{\frac{265}{64}} \Longrightarrow x - \frac{3}{8} = \mp\frac{\sqrt{265}}{8}$

أما $x - \frac{3}{8} = \frac{\sqrt{265}}{8} \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{265}}{8} + \frac{3}{8} = \frac{\sqrt{265}+3}{8}$

أو $x - \frac{3}{8} = \frac{-\sqrt{265}}{8} \Longrightarrow x = \frac{-\sqrt{265}}{8} + \frac{3}{8} = \frac{-\sqrt{265}+3}{8}$ $\qquad S = \left\{\frac{\sqrt{265}+3}{8} \,, -\frac{\sqrt{265}+3}{8}\right\}$

$10)\ 3y^2 + 2y = 1$ واجب

$11)\ x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{1}{5}$

الحل :

- $x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{1}{5}$
- معامل x^2 يساوي واحد
- نضيفها للطرفين $\quad \left[\frac{1}{2} \,.\, x \text{ معامل}\right]^2 = \left[\frac{1}{2} \,.\left(-\frac{6}{5}\right)\right]^2 = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

$$x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{1}{5} \Longrightarrow x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25} = \frac{1}{5} + \frac{9}{25} \Longrightarrow x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25} = \frac{5+9}{25} \Longrightarrow x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25} = \frac{14}{25}$$

- $x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25} = \frac{14}{25} \Longrightarrow \left(x - \frac{3}{5}\right)\left(x - \frac{3}{5}\right) = \frac{14}{25}$
- $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{14}{25} \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x - \frac{3}{5} = \mp\sqrt{\frac{14}{25}} \Longrightarrow x - \frac{3}{5} = \mp\frac{\sqrt{14}}{5}$

أما $x - \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{14}}{5} \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{14}}{5} + \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{14}+3}{5}$

أو $x - \frac{3}{5} = \frac{-\sqrt{14}}{5} \Longrightarrow x = \frac{-\sqrt{14}}{5} + \frac{3}{5} = \frac{-\sqrt{14}+3}{5}$ $\qquad S = \left\{\frac{\sqrt{14}+3}{5} \,, -\frac{\sqrt{14}+3}{5}\right\}$

$12)\ 5y^2 + 15y - 30 = 0$ واجب



تدرب وحل التمرينات

حل المعادلات التالية في R بالمربع الكامل :

13) $x^2+24x+144=0 \Rightarrow (x+12)(x+12)=0 \Rightarrow (x+12)^2=0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x+12=0$

$\Rightarrow x=-12 \qquad S=\{-12\}$

14) $y^2-20y+100=0 \Rightarrow (y-10)(y-10)=0 \Rightarrow (y-10)^2=0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow y-10=0 \Rightarrow y=10 \qquad S=\{10\}$

15) $y^2+4\sqrt{2}y+8=0 \Rightarrow (y+\sqrt{8})(y+\sqrt{8})=0 \Rightarrow (y+\sqrt{8})^2=0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow}$

- $\boxed{\sqrt{8}=2\sqrt{2}}$ $\qquad \Rightarrow y+\sqrt{8}=0 \Rightarrow y=-\sqrt{8} \Rightarrow y=-2\sqrt{2} \qquad S=\{-2\sqrt{2}\}$

16) $7-2\sqrt{7}z+z^2=0$ واجب

17) $3y^2+36-12\sqrt{3}y=0 \Rightarrow 3y^2-12\sqrt{3}y+36=0 \Rightarrow (\sqrt{3}y-6)(\sqrt{3}y-6)=0$

$(\sqrt{3}y-6)^2=0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} \sqrt{3}y-6=0 \Rightarrow \sqrt{3}y=6 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}} \Rightarrow y=\frac{6}{\sqrt{3}} \qquad S=\left\{\frac{6}{\sqrt{3}}\right\}$

18) $9z^2-10z+\frac{25}{9}=0$ واجب

حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع :

19) $y^2+2\sqrt{3}y=3$

الحل :

- $y^2+2\sqrt{3}y=3$
- معامل y^2 يساوي واحد
- نضيفها للطرفين $\left[\frac{1}{2}\cdot \text{معامل } y\right]^2=\left[\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3})\right]^2=(\sqrt{3})^2=3$

$y^2+2\sqrt{3}y=3 \Rightarrow y^2+2\sqrt{3}y+3=3+3 \Rightarrow y^2+2\sqrt{3}y+3=6$

- $y^2+2\sqrt{3}y+3=6 \Rightarrow (y+\sqrt{3})(y+\sqrt{3})=6$
- $(y+\sqrt{3})^2=6 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} y+\sqrt{3}=\mp\sqrt{6}$

أما $y+\sqrt{3}=\sqrt{6} \Rightarrow y=\sqrt{6}-\sqrt{3}$

أو $y+\sqrt{3}=-\sqrt{6} \Rightarrow y=-\sqrt{6}-\sqrt{3} \qquad S=\{\sqrt{6}-\sqrt{3}, -\sqrt{6}-\sqrt{3}\}$

20) $4z^2-12z-27=0$ واجب

$21)\ x^2 - 2x = 0$

الحل :

- $x^2 - 2x = 0$
- معامل x^2 يساوي واحد
- نضيفها للطرفين $\left[\frac{1}{2} .\ \text{معامل}\ x\right]^2 = \left[\frac{1}{2} .(-2)\right]^2 = (-1)^2 = 1$

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 + 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 1$

- $x^2 - 2x + 1 = 1 \Rightarrow (x-1)(x-1) = 1$
- $(x-1)^2 = 1 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x - 1 = \mp 1$

أما $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 1 + 1 = 2$

أو $x - 1 = -1 \Rightarrow x = -1 + 1 = 0$ $\qquad S = \{2\ , 0\}$

$22)\ y^2 - 8y = 24$ واجب

$23)\ x^2 - \frac{2}{3}x = 4$

الحل :

- $x^2 - \frac{2}{3}x = 4$
- معامل x^2 يساوي واحد
- نضيفها للطرفين $\left[\frac{1}{2} .\ \text{معامل}\ x\right]^2 = \left[\frac{1}{2} .\left(-\frac{2}{3}\right)\right]^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

$x^2 - \frac{2}{3}x = 4 \Rightarrow x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 4 + \frac{1}{9} \Rightarrow x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{36+1}{9} \Rightarrow x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{37}{9}$

- $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{37}{9} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{37}{9}$
- $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{37}{9} \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x - \frac{1}{3} = \mp\sqrt{\frac{37}{9}} \Rightarrow x - \frac{1}{3} = \mp\frac{\sqrt{37}}{3}$

أما $x - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{37}}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{37}}{3} + \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{37}+1}{3}$

أو $x - \frac{1}{3} = \frac{-\sqrt{37}}{3} \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{37}}{3} + \frac{1}{3} = \frac{-\sqrt{37}+1}{3}$ $\qquad S = \left\{\frac{\sqrt{37}+1}{3}\ , -\frac{\sqrt{37}+1}{3}\right\}$

$24)\ 8y^2 + 16y - 64 = 0$ واجب

حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع :

$25)\ x^2 - 6x = 15$ واجب

$26)\ y(2y + 28) = 28$

الحل :

- $y(2y + 28) = 28 \Rightarrow 2y^2 + 28y = 28$
- نقسم على معامل y^2 $\qquad 2y^2 + 28y = 28 \Rightarrow \frac{2y^2}{2} + \frac{28y}{2} = \frac{28}{2} \Rightarrow y^2 + 14y = 14$

- نضيفها للطرفين $\left[\frac{1}{2}\,.\ \text{معامل}\ y\right]^2 = \left[\frac{1}{2}\,.(14)\right]^2 = (7)^2 = 49$

$y^2 + 14y = 14 \Rightarrow y^2 + 14y + 49 = 14 + 49 \Rightarrow y^2 + 14y + 49 = 63$

- $y^2 + 14y + 49 = 63 \Longrightarrow (y+7)(y+7) = 63$

- $(y+7)^2 = 63 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} y + 7 = \mp\sqrt{63}$

$y + 7 \approx \mp\sqrt{64}$

$\sqrt{63} \approx \sqrt{64}$

أما $y + 7 \approx \sqrt{64} \;\Rightarrow y \approx 8 - 7 \approx 1$

أو $y + 7 \approx \sqrt{64} \;\Rightarrow y \approx -8 - 7 \approx -15$ $\qquad S = \{1\,,-15\}$

27) $z^2 - 10z + 10 = 0$

الحل :

- $z^2 - 10z + 10 = 0 \Longrightarrow z^2 - 10z = -10$
- معامل z^2 يساوي واحد
- نضيفها للطرفين $\left[\frac{1}{2}\,.\ \text{معامل}\ z\right]^2 = \left[\frac{1}{2}\,.(-10)\right]^2 = (-5)^2 = 25$

$z^2 - 10z = -10 \Rightarrow z^2 - 10z + 25 = -10 + 25 \Rightarrow z^2 - 10z + 25 = 15$

- $z^2 - 10z + 25 = 15 \Longrightarrow (z-5)(z-5) = 15$

- $(z-5)^2 = 15 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} z - 5 = \mp\sqrt{15}$

$z - 5 \approx \mp\sqrt{16}$

$\sqrt{15} \approx \sqrt{16}$

أما $z - 5 \approx \sqrt{16} \;\Rightarrow z \approx 4 + 5 \approx 9$

أو $z - 5 \approx -\sqrt{16} \;\Rightarrow z \approx -4 + 5 \approx 1$ $\qquad S = \{9\,,1\}$

تدرب وحل مسائل حياتية



28) مدينة بابل : مدينة بابل باللاتينية Babylon هي مدينة عراقية كانت تقع على نهر الفرات ، وكانت عاصمة البابليين أيام حكم حمورابي سنة (1792 − 1750) قبل الميلاد . اذا كانت المعادلة $x^2 - 28x + 196 = 0$ تمثل مساحة إحدى القاعات المربعة الشكل ، اذ x تمثل طول ضلع القاعة . جد طول ضلع القاعة .

الحل :

$x^2 - 28x + 196 = 0 \Longrightarrow (x-14)(x-14) = 0 \Longrightarrow (x-14)^2 = 0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow}$

$x - 14 = 0 \Longrightarrow x = 14$ طول الضلع

29) دب الباندا : المساحة المخصصة لدب الباندا في حديقة الحيوانات مستطيلة الشكل 126 مترا مربعا ، وعرضها يقل بمقدار 8 متر عن طولها . جد أبعاد المنطقة المخصصة للدب بالتقريب لأقرب عدد صحيح .

الحل :

نفرض الطول $= x$ ، نفرض العرض $= x - 8$

مساحة المنطقة المستطيلة = الطول × العرض



$x\,(x-8) = 126 \Rightarrow x^2 - 8x = 126$ تحل باكمال المربع

- $x^2 - 8x = 126$
- معامل x^2 يساوي واحد
- نضيفها للطرفين $\left[\frac{1}{2}\,.\ x \text{ معامل}\right]^2 = \left[\frac{1}{2}\,.(-8)\right]^2 = (-4)^2 = 16$

$x^2 - 8x = 126 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 126 + 16 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 142$

- $x^2 - 8x + 16 = 142 \Rightarrow (x-4)(x-4) = 142$
- $(x-4)^2 = 142 \xRightarrow{\text{بالجذر}} x - 4 = \mp\sqrt{142}$

$x - 4 \approx \mp\sqrt{144}$

$\sqrt{142} \approx \sqrt{144}$

أما $x - 4 \approx \sqrt{144} \Rightarrow x \approx 12 + 4 \approx 16\ m$ الطول

أو $x - 4 \approx -\sqrt{144} \Rightarrow x \approx -12 + 4 \approx -12$ تهمل

العرض $x - 8 \approx 16 - 8 \approx 8\ m$

30) حيتان : تجنح بعض المجموعات من الحيتان الى الشاطئ ولا يوجد تفسير علمي لهذه الظاهرة ، ويحاول حماة البيئة ارجاعها الى البحر . حل المعادلة $x^2 + 20x = 525$ بطريقة اكمال المربع لإيجاد قيمة x التي تمثل عدد الحيتان التي جنحت الى أحد شواطئ استراليا .



الحل :

- $x^2 + 20x = 525$
- معامل x^2 يساوي واحد
- نضيفها للطرفين $\left[\frac{1}{2}\,.\ x \text{ معامل}\right]^2 = \left[\frac{1}{2}\,.(20)\right]^2 = (10)^2 = 100$
- $x^2 + 20x = 525 \Rightarrow x^2 + 20x + 100 = 525 + 100 \Rightarrow x^2 + 20x + 100 = 625$
- $x^2 + 20x + 100 = 625 \Rightarrow (x+10)(x+10) = 625$
- $(x+10)^2 = 625 \xRightarrow{\text{بالجذر}} x + 10 = \mp\sqrt{625} \Rightarrow x + 10 = \mp 25$

أما $x + 10 = 25 \Rightarrow x = 25 - 10 = 15$

أو $x + 10 = -25 \Rightarrow x = -25 - 10 = -35$ تهمل

فكر

31) تحدًّ : حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع ، وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح :

$i)\ 4x(x-6)=27$

الحل :

$4x(x-6)=27 \Rightarrow 4x^2-24x=27$

- $4x^2-24x=27$
- نقسم على معامل x^2 $\quad 4x^2-24x=27 \Rightarrow \frac{4x^2}{4}-\frac{24x}{4}=\frac{27}{4} \Rightarrow x^2-6x=\frac{27}{4}$
- نضيفها للطرفين $\quad \left[\frac{1}{2}\ .\ x\ \text{معامل}\right]^2=\left[\frac{1}{2}\ .(-6)\right]^2=(-3)^2=9$

$x^2-6x=\frac{27}{4} \Rightarrow x^2-6x+9=\frac{27}{4}+9 \Rightarrow x^2-6x+9=\frac{27+36}{4} \Rightarrow x^2-6x+9=\frac{63}{4}$

- $x^2-6x+9=\frac{63}{4} \Rightarrow (x-3)(x-3)=\frac{63}{4}$
- $(x-3)^2=\frac{63}{4} \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x-3=\mp\sqrt{\frac{63}{4}}$

$x-3 \approx \mp\sqrt{\frac{64}{4}}$ $\qquad \sqrt{63}\approx\sqrt{64}$

أما $x-3\approx\sqrt{16} \Rightarrow x\approx 4+3\approx 7$

أو $x-3\approx-\sqrt{16} \Rightarrow x\approx -4+3\approx -1$

$ii)\ 6y^2-48y=6$ واجب

32) أصحح الخطأ : حلت سوسن المعادلة $4x^2-4\sqrt{3}x+3=0$ بطريقة إكمال المربع وكتبت مجموعة الحل للمعادلة بالشكل الاتي : $S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$. أكتشف خطأ سوسن وصححه .

الحل :

$4x^2-4\sqrt{3}x+3=0 \Rightarrow (2x-\sqrt{3})(2x-\sqrt{3})=0 \Rightarrow (2x-\sqrt{3})^2=0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow}$

$2x-\sqrt{3}=0 \Rightarrow 2x=\sqrt{3} \Rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

خطأ سوسن هو $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ في مجموعة الحل .

33) حس عددي : هل أن مجموعة حل للمعادلة $y^2-4y+4=0$ تحتوي على قيمتين متساويتين بالمقدار أحدهما سالبة والأخرى موجبة ؟ وضح اجابتك .

الحل : $y^2-4y+4=0 \Rightarrow (y-2)(y-2)=0$

$(y-2)^2=0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} y-2=0 \Rightarrow y=2$ توجد قيمة موجبة واحدة



أكتب : مجموعة الحل للمعادلة :

$$\frac{1}{81}-\frac{2}{9}z+z^2=0$$

الحل :

$$\frac{1}{81}-\frac{2}{9}z+z^2=0 \Rightarrow \left(\frac{1}{9}-z\right)\left(\frac{1}{9}-z\right)=0 \Rightarrow \left(\frac{1}{9}-z\right)^2=0 \xRightarrow{\text{بالجذر}} \frac{1}{9}-z=0$$

$-z=-\frac{1}{9} \Rightarrow z=\frac{1}{9}$ $\qquad S=\left\{\frac{1}{9}\right\}$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

حل المعادلات بالقانون العام

فكرة الدرس : حل المعادلات من الدرجة الثانية بالقانون العام .

المفردات :

- معامل
- الحد المطلق
- القانون العام

حل المعادلات باستعمال القانون

المعادلة القياسية التي بالصورة $ax^2+bx+c=0$ نستخدم القانون العام لايجاد مجموع حلها .

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- حيث أن $a\neq 0$ ، a معامل x^2 ، b معامل x مع اشارته ، c الحد المطلق مع اشارته .
- حيث نقوم بحل المعادلة من الدرجة الثانية بهذا القانون في حالة عدم امكانية حلها بطريقة التجربة أو المربع الكامل .

مثال : أريد رصف ممر على جانبي حديقة منزل بالسيراميك طول الحديقة $7m$ ، وعرضها $5m$ ومساحة الرصف $45m^2$ جد عرض الممر المطلوب رصفه بالسيراميك .

الحل : نفرض عرض الممر $=x$ ، مساحة الجزء الايمن من الممر $=7x$ ، مساحة الجزء الامامي للممر $=5x$

مساحة زاوية الممر $=x^2$ ، مجموع مساحتي الرصف $=45$

$$x^2+7x+5x=45 \Rightarrow x^2+12x=45$$

نضعها بالصورة القياسية $x^2+12x-45=0$

$a=1 \quad , \quad b=12 \quad , \quad c=-45$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-12\pm\sqrt{(-12)^2-4(1)(-45)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{-12\pm\sqrt{144+180}}{2} \Rightarrow x=\frac{-12\pm\sqrt{324}}{2} \Rightarrow x=\frac{-12\pm 18}{2}$$

أما $x=\frac{-12+18}{2}=\frac{6}{2}=3m$ العرض ، أو $x=\frac{-12-18}{2}=\frac{-30}{2}=-15$ تهمل

مثال : جد مجموعة الحل للمعادلة الاتية باستعمال القانون العام في R : $x^2 - 3x - 5 = 0$

الحل :

$$a = 1 \quad , \quad b = -3 \quad , \quad c = -5$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 20}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$$

أما $x = \frac{3+\sqrt{29}}{2}$ ، أو $x = \frac{3-\sqrt{29}}{2}$

$$S = \left\{\frac{3 + \sqrt{29}}{2}, \frac{3 - \sqrt{29}}{2}\right\}$$

المقدار المميز

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

لبيان نوع جذري المعادلة نستخدم المقدار المميز وتكون حسب الحالات الاتية :

١) اذا كانت قيمة المقدار المميز موجب ومربع كامل (اي له جذر تربيعي) فإن للمعادلة جذران حقيقيان نسبيان .

٢) اذا كانت قيمة المقدار المميز موجب وليس مربع كامل (اي ليس له جذر تربيعي) فإن للمعادلة جذران حقيقيان غير نسبيان .

٣) اذا كانت قيمة المقدار المميز تساوي صفر فإن للمعادلة جذران حقيقيان متساويان .

٤) اذا كانت قيمة المقدار المميز سالب فإن ليس للمعادلة حل وتكون مجموعة الحل $S = \emptyset$

مثال : حدد جذري المعادلة أولاً ثم جد مجموعة الحل في R اذا كان ممكنا :

$2x^2 + 3x - 2 = 0$ (1)

الحل :

$$a = 2 \quad , \quad b = 3 \quad , \quad c = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25$$

∴ للمعادلة جذران حقيقيان نسبيان لأن (25) لها جذر تربيعي .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(2)} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

أما $x = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

أو $x = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$ $\qquad S = \left\{\frac{1}{2}, -2\right\}$

$y^2 - 4y - 9 = 0$ (2)

الحل :

$$a = 1 \quad , \quad b = -4 \quad , \quad c = -9$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4(1)(-9) = 16 + 36 = 52$$



∴ للمعادلة جذران حقيقيان غير نسبيان لأن (52) ليس لها جذر تربيعي .

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow y=\frac{-(-4)\pm\sqrt{52}}{2(1)}\Rightarrow y=\frac{4\pm\sqrt{52}}{2}$$

أما $y=\frac{4+\sqrt{52}}{2}$

أو $y=\frac{4-\sqrt{52}}{2}$ $\qquad S=\left\{\frac{4+\sqrt{52}}{2},\frac{4-\sqrt{52}}{2}\right\}$

$z^2+8z=-16$ (3)

الحل : نجعل المعادلة بالصيغة القياسية $z^2+8z+16=0$

$$a=1\quad,\quad b=8\quad,\quad c=16$$

$$\Delta=b^2-4ac\Rightarrow\Delta=(8)^2-4(1)(16)=64-64=0$$

∴ للمعادلة جذران متساويان .

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow z=\frac{-8\pm\sqrt{0}}{2(1)}\Rightarrow z=\frac{-8}{2}=-4\qquad S=\{-4\}$$

$x^2-2x+10=0$ (4)

الحل :

$$a=1\quad,\quad b=-2\quad,\quad c=10$$

$$\Delta=b^2-4ac\Rightarrow\Delta=(-2)^2-4(1)(10)=4-40=-36$$

∴ ليس للمعادلة حل في R لذلك فإن $S=\emptyset$

مثال : ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2-(k+1)x+4=0$ متساويين ؟ تحقق من الاجابة .

الحل : يكون جذرا المعادلة متساويين عندما قيمة المميز $\Delta=0$.

$$a=1\quad,\quad b=-(k+1)\quad,\quad c=4$$

$$\Delta=b^2-4ac\Rightarrow\Delta=[-(k+1)]^2-4(1)(4)$$

$$\Delta=0\Rightarrow(k+1)^2-16=0\Rightarrow(k+1)^2=16\overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow}k+1=\pm4$$

أما $k+1=4\Rightarrow k=4-1=3$

أو $k+1=-4\Rightarrow k=-4-1=-5$

التحقق : نعوض قيمة $k=3$ بالمعادلة الاصلية

$$x^2-(k+1)x+4=0\Rightarrow x^2-(3+1)x+4=0\Rightarrow x^2-4x+4=0$$

$$(x-2)(x-2)=0\Rightarrow(x-2)^2=0\overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow}x-2=0\Rightarrow x=2$$

نعوض قيمة $k=-5$ بالمعادلة الاصلية

$$x^2-(k+1)x+4=0\Rightarrow x^2-(-5+1)x+4=0\Rightarrow x^2-(-4)x+4=0$$

$$x^2+4x+4=0\Rightarrow(x+2)(x+2)=0\Rightarrow(x+2)^2=0\overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow}x+2=0\Rightarrow x=-2$$

تأكد من فهمك

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام في R :

$(1)\ x^2 - 4x - 5 = 0$

الحل :

$$a = 1 \quad , \quad b = -4 \quad , \quad c = -5$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)} \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} \Rightarrow x = \frac{4 \pm 6}{2}$$

أما $x = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5$

أو $x = \frac{4-6}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ $\qquad S = \{5 , -1\}$

$(2)\ y^2 + 5y - 1 = 0$ واجب

$(3)\ 3x^2 - 9x = -2$

الحل : نضع المعادلة بالصيغة القياسية $ax^2 + bx + c = 0$

$$3x^2 - 9x + 2 = 0$$

$$a = 3 \quad , \quad b = -9 \quad , \quad c = 2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} \Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 24}}{6}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{2}$$

أما $x = \frac{9+\sqrt{57}}{2}$ أو $x = \frac{9-\sqrt{57}}{2}$ $\qquad S = \left\{\frac{9+\sqrt{57}}{2} , \frac{9-\sqrt{57}}{2}\right\}$

$(4)\ 4y^2 + 8y = 6$

الحل : نضع المعادلة بالصيغة القياسية $ax^2 + bx + c = 0$

$$4y^2 + 8y - 6 = 0$$

$$a = 4 \quad , \quad b = 8 \quad , \quad c = -6$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow y = \frac{-8 \pm \sqrt{(8)^2 - 4(4)(-6)}}{2(4)} \Rightarrow y = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 96}}{8}$$

$$y = \frac{-8 \pm \sqrt{160}}{8}$$

أما $y = \frac{-8+\sqrt{160}}{8}$ أو $y = \frac{-8-\sqrt{160}}{8}$ $\qquad S = \left\{\frac{-8+\sqrt{160}}{8} , \frac{-8-\sqrt{160}}{8}\right\}$

$(5)\ 4x^2 - 12x + 9 = 0$ واجب

$(6)\ 2y^2 - 3 = -5y$

الحل : نضع المعادلة بالصيغة القياسية $ax^2 + bx + c = 0$

$$2y^2 + 5y - 3 = 0$$

$$a = 2 \quad , \quad b = 5 \quad , \quad c = -3$$

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow y=\frac{-5\pm\sqrt{(5)^2-4(2)(-3)}}{2(2)}\Rightarrow y=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{4}$$

$$y=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{4}\Rightarrow y=\frac{-5\pm 7}{4}$$

أما $y=\frac{-5+7}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ أو $y=\frac{-5-7}{4}=\frac{-12}{4}=-3$ $\quad S=\left\{\frac{1}{2},-3\right\}$

حدد جذر المعادلة أولاً ، ثم جد مجموعة الحل في R اذا كان ممكنا :

$(7)\ 2x^2+3x=5$

الحل : نضع المعادلة بالصيغة القياسية $ax^2+bx+c=0$

$2x^2+3x-5=0$

$a=2 \quad , \quad b=3 \quad , \quad c=-5$

$\Delta=b^2-4ac\Rightarrow \Delta=(3)^2-4(2)(-5)=9+40=49$

∴ للمعادلة جذران حقيقيان نسبيان لأن 49 لها جذر .

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{4}\Rightarrow x=\frac{-3\pm 7}{4}$$

أما $x=\frac{-3+7}{4}=\frac{4}{4}=1$ أو $x=\frac{-3-7}{4}=\frac{-10}{4}=\frac{-5}{2}$ $\quad S=\left\{1,\frac{-5}{2}\right\}$

$(8)\ 3x^2-7x+6=0$ واجب

$(9)\ y^2-2y+1=0$

$a=1 \quad , \quad b=-2 \quad , \quad c=1$

$\Delta=b^2-4ac\Rightarrow \Delta=(-2)^2-4(1)(1)=4-4=0$

∴ للمعادلة جذران متساويان .

$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow y=\frac{-(-2)\pm\sqrt{0}}{2(1)}\Rightarrow y=\frac{2}{2}=1 \qquad S=\{1\}$

$(10)\ y^2+12=-9y$ واجب

(11) ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2-(k+2)x+36=0$ متساويين ؟وتحقق من الاجابة.

الحل : يكون جذرا المعادلة متساويين عندما قيمة المميز $\Delta=0$

$a=1 \quad , \quad b=-(k+2) \quad , \quad c=36$

$\Delta=b^2-4ac\Rightarrow \Delta=[-(k+2)]^2-4(1)(36)$

$\Delta=0\Rightarrow (k+2)^2-144=0\Rightarrow (k+2)^2=144 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} k+2=\pm\sqrt{144}$

$k+2=\pm 12$

أما $k+2=12\Rightarrow k=12-2=10$

أو $k+2=-12\Rightarrow k=-12-2=-14$

التحقق : نعوض قيمة $k=10$ بالمعادلة الاصلية

$x^2-(k+2)x+36=0\Rightarrow x^2-(10+2)x+36=0\Rightarrow x^2-12x+36=0$

$(x-6)(x-6)=0\Rightarrow (x-6)^2=0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x-6=0 \Rightarrow x=6$

نعوض قيمة $k=-14$ بالمعادلة الاصلية

$x^2-(k+2)x+36=0 \Rightarrow x^2-(-14+2)x+36=0 \Rightarrow x^2-(-12)x+36=0$

$x^2+12x+36=0 \Rightarrow (x+6)(x+6)=0 \Rightarrow (x+6)^2=0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x+6=0 \Rightarrow x=-6$

(12) ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $4y^2+25=(k-5)y$ متساويين ؟ وتحقق من الاجابة .

الحل : $4y^2-(k-5)y+25=0$

يكون جذرا المعادلة متساويين عندما قيمة المميز $\Delta=0$

$a=4 \quad , \quad b=-(k-5) \quad , \quad c=25$

$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=[-(k-5)]^2-4(4)(25)$

$\Delta=0 \Rightarrow (k-5)^2-400=0 \Rightarrow (k-5)^2=400 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} k-5=\pm\sqrt{400}$

$k-5=\pm 20$

أما $k-5=20 \Rightarrow k=20+5=25$

أو $k-5=-20 \Rightarrow k=-20+5=-15$

التحقق : نعوض قيمة $k=25$ بالمعادلة الاصلية

$4y^2-(25-5)y+25=0 \Rightarrow 4y^2-20y+25=0 \Rightarrow (2y-5)(2y-5)=0$

$(2y-5)^2=0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} 2y-5=0 \Rightarrow 2y=5 \Rightarrow \frac{2y}{2}=\frac{5}{2} \Rightarrow y=\frac{5}{2}$

نعوض قيمة $k=-15$ بالمعادلة الاصلية

$4y^2-(k-5)y+25=0 \Rightarrow 4y^2-(-15-5)y+25=0 \Rightarrow 4y^2-(-20)y+25=0$

$4y^2+20y+25=0 \Rightarrow (2y+5)(2y+5)=0 \Rightarrow (2y+5)^2=0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} 2y+5=0$

$2y=-5 \Rightarrow \frac{2y}{2}=\frac{-5}{2} \Rightarrow y=\frac{-5}{2}$

(13) ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $z^2+16=(k+4)z$ متساويين ؟ وتحقق من الاجابة .

(14) بين ان المعادلة $z^2-6z+28=0$ ليس لها حل في R .

الحل : نستخدم في هذا النوع من الاسئلة المقدار المميز

$a=1 \quad , \quad b=-6 \quad , \quad c=28$

$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=(-6)^2-4(1)(28)=36-112=-76$

∴ ليس للمعادلة حل في R لأن قيمة المقدار المميز سالب $S=\emptyset$

تدرب وحل التمرينات

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام في R :

(15) $x^2-7x-14=0$ واجب

(16) $y^2+3y-9=0$ واجب

(17) $2x^2-8(3x+2)=0$

الحل :

$2x^2-24x-16=0$

$a = 2 \quad , \quad b = -24 \quad , \quad c = -16$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(2)(-16)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{576 + 128}}{4} \Rightarrow x = \frac{24 \pm \sqrt{704}}{4}$$

أما $x = \frac{24+\sqrt{704}}{4}$ أو $x = \frac{24-\sqrt{704}}{4}$ $\quad S = \left\{\frac{24+\sqrt{704}}{4} , \frac{24-\sqrt{704}}{4}\right\}$

(18) $2y^2 - 2 = -10y$ واجب

حدد جذور المعادلة أولاً ثم جد مجموعة الحل في R اذا كان ممكنا :

(19) $x^2 + 4x = 5$

الحل :

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$a = 1 \quad , \quad b = 4 \quad , \quad c = -5$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (4)^2 - 4(1)(-5) = 16 + 20 = 36$

∴ للمعادلة جذران حقيقيان نسبيان لأن 36 لها جذر .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2(1)} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm 6}{2}$$

أما $x = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$ أو $x = \frac{-4-6}{2} = \frac{-10}{2} = -5$ $\quad S = \{1 , -5\}$

(20) $y^2 - 2y - 10 = 0$ واجب

(21) $2x^2 - 5x + 7 = 0$ واجب

(22) $y^2 - 14y + 49 = 0$ واجب

(23) ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k+9)x + 49 = 0$ متساويين ؟ تحقق من الاجابة .

(24) ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $4y^2 + 36 = (k-6)y$ متساويين ؟ تحقق من الاجابة .

(25) ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $z^2 + 81 = (k+9)z$ متساويين ؟ تحقق من الاجابة .

الحل : $z^2 - (k+9)z + 81 = 0$

يكون جذرا المعادلة متساويين عندما قيمة المميز $\Delta = 0$

$a = 1 \quad , \quad b = -(k+9) \quad , \quad c = 81$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = [-(k+9)]^2 - 4(1)(81)$

$\Delta = 0 \Rightarrow (k+9)^2 - 324 = 0 \Rightarrow (k+9)^2 = 324 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} k + 9 = \pm\sqrt{324}$

$k + 9 = \pm 18$

أما $k + 9 = 18 \Rightarrow k = 18 - 9 = 9$

أو $k + 9 = -18 \Rightarrow k = -18 - 9 = -27$

التحقق : نعوض قيمة $k = 9$ بالمعادلة الاصلية

$z^2 - (k+9)z + 81 = 0 \Rightarrow z^2 - (9+9)z + 81 = 0 \Rightarrow z^2 - 18z + 81 = 0$

$$(z-9)(z-9)=0 \Rightarrow (z-9)^2=0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} z-9=0 \Rightarrow z=9$$

نعوض قيمة $k=-27$ بالمعادلة الاصلية

$$z^2-(k+9)z+81=0 \Rightarrow z^2-(-27+9)z+81=0 \Rightarrow z^2-(-18)z+81=0$$

$$z^2+18z+81=0 \Rightarrow (z+9)(z+9)=0 \Rightarrow (z+9)^2=0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} z+9=0$$

$$z=-9$$

(26) بين ان المعادلة $2z^2-3z+10=0$ ليس لها حل في R . واجب

تدرب وحل مسائل حياتية



(27) ألعابٌ نارية : في إحدى المناسبات أُطلقت مجموعة من الألعاب النارية عموديا في الهواء وصلت إلى ارتفاع $140m$. احسب الزمن t ثانية الذي وصلت به إلى هذا الارتفاع من المعادلة التالية: $5t^2+60t=140$

الحل :

$$5t^2+60t=140$$

$$5t^2+60t-140=0 \overset{\div 5}{\Rightarrow} t^2+12t-28=0$$

تحل بطريقة التجربة أو باستخدام القانون الدستور .

$$a=1 \quad , \quad b=12 \quad , \quad c=-28$$

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow t=\frac{-12\pm\sqrt{(12)^2-4(1)(-28)}}{2(1)}$$

$$t=\frac{-12\pm\sqrt{144+112}}{2} \Rightarrow t=\frac{-12\pm\sqrt{256}}{2} \Rightarrow t=\frac{-12\pm16}{2}$$

أما $t=\frac{-12+16}{2} \Rightarrow t=\frac{4}{2}=2$ ثانية

أو $t=\frac{-12-16}{2} \Rightarrow t=\frac{-28}{2}=-14$ تهمل



(28) تجارةٌ : يحسب سامر سعرَ الكلفة للبدلة الرجالية الواحدة ثم يضيف عليها مبلغَ للربح ويبيعها للزبائن بمبلغ 120 ألف دينار ، إذا كانت p في المعادلة $p^2-30p+225=0$ تمثّل مبلغَ ربح سامر في البدلة الواحدة بأُلوف الدنانير ، فما سعرُ كلفة البدلة الواحدة ؟

الحل :

$$p^2-30p+225=0$$

تحل بطريقة القانون الدستور .

$$a=1 \quad , \quad b=-30 \quad , \quad c=225$$

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Longrightarrow p = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(1)(225)}}{2(1)}$$

$$p = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 900}}{2} \Longrightarrow p = \frac{30 \pm \sqrt{0}}{2} \Longrightarrow p = \frac{30}{2} = 15$$

ربح سامر في البدلة الواحدة ألف دينار .

$\therefore \quad p = 120 - 15 = 105$ سعر كلفة البدلة

فكر

29) تحدٍّ : حدد جذور المعادلة أولاً ثم جد مجموعة الحل في R اذا كان ممكنا :

$i)\ x^2 + 8x = 10$

نضع المعادلة بالصيغة القياسية $ax^2 + bx + c = 0$

$x^2 + 8x - 10 = 0$

$a = 1 \quad , \quad b = 8 \quad , \quad c = -10$

$\Delta = b^2 - 4ac \Longrightarrow \Delta = (8)^2 - 4(1)(-10) = 64 + 40 = 104$

∴ للمعادلة جذران حقيقيان غير نسبيان لأن 104 ليس لها جذر .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Longrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{104}}{2(1)} \Longrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{104}}{2}$$

أما $x = \frac{-8+\sqrt{104}}{2}$ أو $x = \frac{-8-\sqrt{104}}{2}$ $\quad S = \left\{\frac{-8+\sqrt{104}}{2} , \frac{-8-\sqrt{104}}{2}\right\}$

$(ii)\ 3y^2 - 6y - 42 = 0$ واجب

30) أصحح الخطأ : قال سعد إن المعادلة $2x^2 - 3x - 9 = 0$ ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية. اكتشف خطأ سعد وصحِّحه .

31) حسٌّ عدديٌّ : استعملت مروةُ المقدارَ المميّزَ لكتابة جذرَي المعادلة $z^2 - 8z + 16 = 0$ دون تحليلها. فسِّر كيف استطاعت مروة كتابة جذرَي المعادلة .

الحل :

$a = 1 \quad , \quad b = -8 \quad , \quad c = 16$

$\Delta = b^2 - 4ac \Longrightarrow \Delta = (-8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0$

∴ للمعادلة جذر واحد .

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Longrightarrow x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2(1)} \Longrightarrow x = \frac{8}{2} = 4$$

أكتب : نوع جذري المعادلة $x^2 + 100 = 20x$ باستعمال المقدار المميز دون حلها .

الحل : $x^2 - 20x + 100 = 0$

$a = 1 \quad , \quad b = -20 \quad , \quad c = 100$

$\Delta = b^2 - 4ac \Longrightarrow \Delta = (-20)^2 - 4(1)(100) = 400 - 400 = 0$

∴ للمعادلة جذر واحد لأن قيمة المميز تساوي صفر .

حل المعادلات الكسرية

فكرة الدرس : حل المعادلات الكسرية من الدرجة الثانية .

المفردات :

- بسط الكسر
- مقام الكسر
- معادلة كسرية

ملاحظات :

- مجموعة الحل للمعادلات الكسرية تعتمد على عملية التحقق ففي حالة النتائج متطابقة للطرفين فان مجموعة الحل هي القيم الناتجة ، أما اذا لم تكن النتائج متطابقة اي الطرف الايمن لا يساوي الطرف الايسر فإن مجموعة الحل $= \emptyset$.
- في حالة التعويض في المعادلة الاصلية بالقيم الناتجة وأصبح المقام يساوي صفر فإن هذه القيمة تهمل وتكون مجموعة الحل للمعادلة القيمة الثانية أو تكون مجموعة الحل $= \emptyset$.

مثال : اذا كان ثمن شراء تحفة واحدة بدلالة المتغير x هو $2x+3$ الف دينار وثمن شراء ست تحفيات بدلالة x هو x^2+3x-1 ألف دينار فإذا كانت نسبة ثمن تحفية واحدة الى ثمن ست تحفيات $\frac{1}{3}$ فما ثمن شراء تحفية واحدة؟

الحل :

$$\frac{\text{ثمن تحفية واحدة}}{\text{ثمن ست تحفيات}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2x+3}{x^2+3x-1} = \frac{1}{3}$$ طرفين في وسطين

$$(x^2+3x-1)(1) = 3(2x+3) \Rightarrow x^2+3x-1 = 6x+9$$

$$x^2+3x-1-6x-9 = 0 \Rightarrow x^2-3x-10 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) = 0$$

أما $x-5=0 \Rightarrow x=5$

أو $x+2=0 \Rightarrow x=-2$ تهمل

$2x+3 = 2(5)+3 = 13$ ثلاث ألف عشر دينار (ثمن شراء تحفية واحدة)

مثال : جد مجموعة الحل للمعادلة التالية ثم تحقق من صحة الحل :

$$5x + \frac{x-2}{3x} = \frac{2}{3}$$

الحل : نضرب طرفي المعادلة بالمضاعف المشترك الاصغر للمقامات وهو $3x$

$$\left[5x + \frac{x-2}{3x} = \frac{2}{3}\right] \times 3x$$

$$5x(3x) + \frac{x-2}{3x}(3x) = \frac{2}{3}(3x) \Rightarrow 15x^2 + x - 2 = 2x$$

$$15x^2 + x - 2 - 2x = 0 \Rightarrow 15x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (5x-2)(3x+1) = 0$$

أما $5x-2=0 \Rightarrow 5x=2 \Rightarrow \frac{5x}{5} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{2}{5}$

أو $3x+1=0 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow \frac{3x}{3}=\frac{-1}{3} \Rightarrow x=\frac{-1}{3}$

التحقق : نعوض بالمعادلة الاصلية $x=\frac{2}{5}$

الطرف الايسر $5x+\frac{x-2}{3x} \Rightarrow 5\left(\frac{2}{5}\right)+\frac{\frac{2}{5}-\frac{2}{1}}{3\left(\frac{2}{5}\right)}=2+\frac{\frac{2-10}{5}}{\frac{6}{5}}=\frac{2}{1}+\frac{-8}{6}=\frac{12+(-8)}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ الطرف الايمن

نعوض بالمعادلة الاصلية $x=\frac{-1}{3}$

الطرف الايسر $5x+\frac{x-2}{3x} \Rightarrow 5\left(\frac{-1}{3}\right)+\frac{\frac{-1}{3}-\frac{2}{1}}{3\left(\frac{-1}{3}\right)}=\frac{-5}{3}+\frac{\frac{-1-6}{3}}{-1}=\frac{-5}{3}+\frac{-7}{-3}=\frac{-5+7}{3}=\frac{2}{3}$ الطرف الايمن

$$S=\left\{\frac{2}{5},\frac{-1}{3}\right\}$$

مثال : جد مجموعة الحل للمعادلة في R :

$$\frac{x}{x-3}+\frac{4x}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$$

الحل :

$$\frac{x}{x-3}+\frac{4x}{x+3}=\frac{18}{(x-3)(x+3)}$$

$\frac{x}{x-3}+\frac{4x}{x+3}=\frac{18}{(x-3)(x+3)}$ نضرب طرفي المعادلة بالمضاعف المشترك الأصغر $(x-3)(x+3)$

$$\frac{x}{x-3}\times(x-3)(x+3)+\frac{4x}{x+3}\times(x-3)(x+3)=\frac{18}{(x-3)(x+3)}\times(x-3)(x+3)$$

$$x(x+3)+4x(x-3)=18 \Rightarrow x^2+3x+4x^2-12x-18=0$$

$$5x^2-9x-18=0 \Rightarrow (x-3)(5x+6)=0$$

أما $x-3=0 \Rightarrow x=3$

أو $5x+6=0 \Rightarrow 5x=-6 \Rightarrow \frac{5x}{5}=\frac{-6}{5} \Rightarrow x=\frac{-6}{5}$

التحقق : نعوض بالمعادلة الاصلية $x=3$

الطرف الايسر $\frac{x}{x-3}+\frac{4x}{x+3} \Rightarrow \frac{3}{3-3}+\frac{4(3)}{3+3}=\frac{3}{0}+\frac{12}{6}$

$x=3$ تهمل لأنها تجعل المقام يساوي صفر .

نعوض بالمعادلة الاصلية $x=\frac{-6}{5}$

الطرف الايسر $\frac{x}{x-3}+\frac{4x}{x+3} \Rightarrow \frac{\frac{-6}{5}}{\frac{-6}{5}-\frac{3}{1}}+\frac{4\left(\frac{-6}{5}\right)}{\frac{-6}{5}+3}=\frac{\frac{-6}{5}}{\frac{-6-15}{5}}+\frac{\frac{-24}{5}}{\frac{-6+15}{5}}=\frac{-6}{-21}+\frac{-24}{9}=\frac{2}{7}+\frac{-8}{3}$

$$\frac{2}{7}+\frac{-8}{3}=\frac{6+(-56)}{21}=\frac{-50}{21}$$

الطرف الايمن $\frac{18}{x^2-9} \Rightarrow \frac{18}{\left(\frac{-6}{5}\right)^2-9}=\frac{18}{\frac{36}{25}-\frac{9}{1}}=\frac{18}{\frac{36-225}{25}}=\frac{18(25)}{36-225}=\frac{450}{-189}=\frac{50}{-21}$

الطرف الايمن = الطرف الايسر $\qquad S=\left\{\frac{-6}{5}\right\}$



مثال : جد مجموعة الحل للمعادلة :

$$\frac{2}{x+2}-\frac{x}{2-x}=\frac{x^2+4}{x^2-4}$$

الحل :

$$\frac{2}{x+2}-\frac{x}{-x+2}=\frac{x^2+4}{(x+2)(x-2)}$$

$$\frac{2}{x+2}-\frac{x}{-(x-2)}=\frac{x^2+4}{(x+2)(x-2)} \Rightarrow \frac{2}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{x^2+4}{(x+2)(x-2)}$$

نضرب طرفي المعادلة بالمضاعف المشترك الأصغر $(x+2)(x-2)$

$$\frac{2}{x+2}(x+2)(x-2)+\frac{x}{x-2}(x+2)(x-2)=\frac{x^2+4}{(x+2)(x-2)}(x+2)(x-2)$$

$$2(x-2)+x(x+2)=x^2+4 \Rightarrow 2x-4+x^2+2x=x^2+4$$

$$2x-4+x^2+2x-x^2-4=0 \Rightarrow 4x-8=0 \Rightarrow 4x=8 \Rightarrow \frac{4x}{4}=\frac{8}{4} \Rightarrow x=2$$

التحقق : نعوض بالمعادلة الاصلية $x=2$

الطرف الايسر $\frac{2}{x+2}-\frac{x}{2-x} \Rightarrow \frac{2}{2+2}-\frac{2}{2-2}=\frac{2}{4}-\frac{2}{0}$

$x=2$ تهمل لأنها تجعل المقام يساوي صفر .

$$\therefore S=\emptyset$$

تأكد من فهمك

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية في R وتحقق من صحة الحل :

$$1)\ \frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{6}{4x^2}$$

الحل :

$\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{6}{4x^2}$ نضرب طرفي المعادلة بالمضاعف المشترك الاصغر $4x^2$

$$\frac{1}{x}4x^2+\frac{1}{2}4x^2=\frac{6}{4x^2}4x^2$$

$$4x+2x^2=6 \Rightarrow 2x^2+4x-6=0 \overset{\div 2}{\Rightarrow} x^2+2x-3=0 \Rightarrow (x+3)(x-1)=0$$

أما $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1$

التحقق : نعوض بالمعادلة الاصلية $x=-3$

الطرف الايسر $\frac{1}{x}+\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{-3}+\frac{1}{2}=\frac{-2+3}{6}=\frac{1}{6}$

الطرف الايمن $\frac{6}{4x^2}=\frac{6}{4(-3)^2}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ الطرف الايمن = الطرف الايسر

نعوض بالمعادلة الاصلية $x=1$

الطرف الايسر $\frac{1}{x}+\frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$

الطرف الايمن $\frac{6}{4x^2}=\frac{6}{4(1)^2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ الطرف الايمن = الطرف الايسر

$\therefore S=\{-3\,,1\}$

$2)\ \frac{y}{2}-\frac{7}{5}=\frac{3}{10y}$

الحل : نقوم بتوحيد المقامات الموجودة في الطرف الايسر

$\frac{5y-14}{10}=\frac{3}{10y}$ طرفين في وسطين (اصبحت هذه هي المعادلة الاصلية)

$5y\times(10y)-14\times(10y)=3\times10$

$50y^2-140y=30 \overset{\div10}{\Longrightarrow} 5y^2-14y=3 \Longrightarrow 5y^2-14y-3=0$

$(y-3)(5y+1)=0$

أما $y-3=0 \Longrightarrow y=3$

أو $5y+1=0 \Longrightarrow 5y=-1 \Longrightarrow \frac{5y}{5}=\frac{-1}{5} \Longrightarrow y=\frac{-1}{5}$

التحقق : نعوض في المعادلة الاصلية $y=3$

الطرف الايسر $\frac{5y-14}{10} \Longrightarrow \frac{5(3)-14}{10}=\frac{15-14}{10}=\frac{1}{10}$

الطرف الايمن $\frac{3}{10y} \Longrightarrow \frac{3}{10(3)}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$

الطرف الايمن = الطرف الايمن

نعوض في المعادلة الاصلية $y=\frac{-1}{5}$

الطرف الايسر $\frac{5y-14}{10} \Longrightarrow \frac{5\left(\frac{-1}{5}\right)-14}{10}=\frac{-1-14}{10}=\frac{-15}{10}=\frac{-3}{2}$

الطرف الايمن $\frac{3}{10(\frac{-1}{5})} \Longrightarrow \frac{3}{-2}$

الطرف الايمن = الطرف الايمن

$S=\left\{3\,,\frac{-1}{5}\right\}$

$3)\ \frac{x+4}{2}=\frac{-3}{2x}$

الحل :

$\frac{x+4}{2}=\frac{-3}{2x}$ طرفين في وسطين

$(x+4)(2x)=-3\times2 \Longrightarrow 2x^2+8x=-62x^2+8x+6=0 \overset{\div2}{\Longrightarrow} x^2+4x+3=0$

$(x+3)(x+1)=0$

أما $x+3=0 \Longrightarrow x=-3$

أو $x+1=0 \Longrightarrow x=-1$

التحقق : نعوض في المعادلة الاصلية $x = -3$

الطرف الايسر $\frac{x+4}{2} \Longrightarrow \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}$

الطرف الايمن $\frac{-3}{2x} \Longrightarrow \frac{-3}{2(-3)} = \frac{1}{2}$

الطرف الايمن = الطرف الايسر

نعوض في المعادلة الاصلية $x = -1$ (واجب)

$$S = \{-3 , -1\}$$

4) $\frac{y+1}{y^2} = \frac{3}{4}$ واجب

5) $\frac{9x - 14}{x - 5} = \frac{x^2}{x - 5}$

الحل : بما ان المقامات متساوية اذن يمكن حذفهما .

$$\frac{9x - 14}{x - 5} = \frac{x^2}{x - 5} \Longrightarrow 9x - 14 = x^2 \Longrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$$

$(x - 7)(x - 2) = 0$

اما $x - 7 = 0 \Longrightarrow x = 7$

أو $x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$

التحقق : نعوض في المعادلة الاصلية

الطرف الايسر $\frac{9x-14}{x-5} \Longrightarrow \frac{9(7)-14}{7-5} = \frac{63-14}{2} = \frac{49}{2}$

الطرف الايمن $\frac{x^2}{x-5} \Longrightarrow \frac{(7)^2}{7-5} = \frac{49}{2}$

الطرف الايمن = الطرف الايسر

الطرف الايسر $\frac{9x-14}{x-5} \Longrightarrow \frac{9(2)-14}{2-5} = \frac{18-14}{-3} = \frac{4}{-3}$

الطرف الايمن $\frac{x^2}{x-5} \Longrightarrow \frac{(2)^2}{2-5} = \frac{4}{-3}$

الطرف الايمن = الطرف الايسر

$$\therefore S = \{7 , 2\}$$

6) $\frac{1}{y^2 - 6} = \frac{2}{y + 3}$ واجب

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية في R :

7) $\frac{y - 4}{y + 2} - \frac{2}{y - 2} = \frac{17}{y^2 - 4}$ واجب

8) $\frac{9}{x^2 - x - 6} - \frac{5}{x - 3} = 1$

الحل :

$$\frac{9}{x^2 - x - 6} - \frac{5}{x - 3} = 1$$

$$\frac{9}{(x - 3)(x + 2)} - \frac{5}{x - 3} = 1$$

نضرب طرفي المعادلة بالمضاعف المشترك الاصغر $(x - 3)(x + 2)$



$$\frac{9}{(x-3)(x+2)}(x-3)(x+2) - \frac{2}{x-3}(x-3)(x+2) = 1\,(x-3)(x+2)$$

$$9 - 5(x+2) = (x-3)(x+2)$$

$$9 - 5x - 10 = x^2 + 2x - 3x - 6 \Longrightarrow x^2 + 2x - 3x - 6 - 9 + 5x + 10 = 0$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \Longrightarrow (x+5)(x-1) = 0$$

اما $x + 5 = 0 \Longrightarrow x = -5$

أو $x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$

$$S = \{-5\ ,1\}$$

9) $\frac{12}{y^2-16} + \frac{6}{y+4} = 2$ واجب

10) $\frac{2x}{x+1} + \frac{3x}{x-1} = \frac{8+7x+3x^2}{x^2-1}$ واجب

تدرب وحل التمرينات

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية في R وتحقق من صحة الحل :

11) $\frac{4}{6x^2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{x}$ واجب

12) $\frac{3y}{4} - \frac{6}{12y} + \frac{1}{4} = 0$

الحل :

$\frac{3y}{4} - \frac{6}{12y} + \frac{1}{4} = 0$ نضرب طرفي المعادلة بالمضاعف المشترك الاصغر $12y$

$$\frac{3y}{4}\left(12y\right) - \frac{6}{12y}(12y) + \frac{1}{4}\left(12y\right) = 0 \Longrightarrow 3y(3y) - 6 + 3y = 0$$

$$9y^2 - 6 + 3y = 0 \Longrightarrow 9y^2 + 3y - 6 = 0 \overset{\div 3}{\Longrightarrow} 3y^2 + y - 2 = 0 \Longrightarrow (y+1)(3y-2) = 0$$

اما $y + 1 = 0 \Longrightarrow y = -1$

أو $3y - 2 = 0 \Longrightarrow 3y = 2 \Longrightarrow \frac{3y}{3} = \frac{2}{3} \Longrightarrow y = \frac{2}{3}$

التحقق : نعوض بالمعادلة الاصلية $y = -1$

الطرف الايسر $\frac{3y}{4} - \frac{6}{12y} + \frac{1}{4} \Longrightarrow \frac{3(-1)}{4} - \frac{6}{12(-1)} + \frac{1}{4} = \frac{-3}{4} + \frac{6}{12} + \frac{1}{4} = \frac{-2}{4} + \frac{6}{12} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

الطرف الايمن = الطرف الايسر

نعوض بالمعادلة الاصلية $y = \frac{2}{3}$

الطرف الايسر $\frac{3y}{4} - \frac{6}{12y} + \frac{1}{4} \Longrightarrow \frac{3\left(\frac{2}{3}\right)}{4} - \frac{6}{12\left(\frac{2}{3}\right)} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{6}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{6}{8} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0$

الطرف الايمن = الطرف الايسر

$$\therefore S = \left\{-1\,,\frac{2}{3}\right\}$$

13) $\frac{9x+22}{x^2}=1$ واجب

14) $\frac{9}{(y+2)^2}=\frac{3y}{y+2}$

الحل : نقوم بحذف المقام مع المقام الاخر لأنهما متساويان

$$\frac{9}{(y+2)^2}=\frac{3y}{y+2}$$

$$\frac{9}{y+2}=\frac{3y}{1}\Rightarrow (y+2)(3y)=9\Rightarrow 3y^2+6y=9$$

$$3y^2+6y-9=0\overset{\div 3}{\Rightarrow} y^2+2y-3=0\Rightarrow (y+3)(y-1)=0$$

أما $y+3=0\Rightarrow y=-3$

أو $y-1=0\Rightarrow y=1$ $\qquad S=\{-3\,,1\}$

التحقق : واجب

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية في R :

15) $\frac{3}{x-4}-\frac{2}{x-3}=1$ واجب

16) $\frac{y-5}{y+5}-\frac{y+5}{y-5}=\frac{4y^2-24}{y^2-25}$

الحل :

$$\frac{y-5}{y+5}-\frac{y+5}{y-5}=\frac{4y^2-24}{(y+5)(y-5)}$$

نضرب طرفي المعادلة بالمضاعف المشترك الاصغر $(y+5)(y-5)$

$$\frac{y-5}{y+5}(y+5)(y-5)-\frac{y+5}{y-5}(y+5)(y-5)=\frac{4y^2-24}{(y+5)(y-5)}(y+5)(y-5)$$

$$(y-5)(y-5)-(y+5)(y+5)=4y^2-24$$

$$y^2-5y-5y+25-[y^2+5y+5y+25]=4y^2-24$$

$$y^2-5y-5y+25-y^2-5y-5y-25=4y^2-24$$

$$4y^2+20y-24=0\overset{\div 4}{\Rightarrow} y^2+5y-6=0\Rightarrow (y+6)(y-1)=0$$

أما $y+6=0\Rightarrow y=-6$

أو $y-1=0\Rightarrow y=1$ $\qquad S=\{-6\,,1\}$

17) $\frac{6-x}{x^2+x-12}-\frac{2}{x+4}=1$ واجب

18) $\frac{4+8y}{y^2-9}+\frac{6}{y-3}=3$ واجب

تدرب وحل مسائل حياتية



19) رياضة : إذا أرادَ راكبُ دراجةٍ قطعَ مسافةِ 60 km بين مدينتين A, B بسرعة معينة ، ولو زادت سرعته بمقدار 10 km/h لَتمكَّنَ من قطع هذه المسافة بزمن يقل ساعة واحدة عن الزمن الأول جد سرعته أولاً .

الحل :

نفرض سرعة الراكب أولاً = x ، نفرض سرعة بعد الزيادة = $x+10$

نفرض الزمن الذي استغرقه أولاً = $\frac{60}{x}$ ، نفرض الذي استغرقه ثانيا = $\frac{60}{x+10}$

$$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+10}=1].x(x+10)\Longrightarrow\frac{60}{x}x(x+10)-\frac{60}{x+10}x(x+10)=x(x+10)$$

$$60(x+10)-60x=x^2+10x\Longrightarrow 60x+600-60x=x^2+10x$$

$$x^2+10x-600=0\Longrightarrow(x+30)(x-20)=0$$

أما $x+30=0\ \Longrightarrow x=-30$ تهمل

أو $x-20=0\ \Longrightarrow x=20\ km/h$ سرعته أولاً

$x+10=20+10=30\ km/h$ سرعته ثانيا



20) نقل مسافرين : تقطعُ طائرةُ الخطوط الجوية العراقية المسافةَ $350\ km$ بين مدينة بغداد وأربيل بسرعة معينة، ولو زادت سرعة الطائرة بمقدار $100\ km/h$ لَتمكَّنَت الطائرةُ من قطع المسافة بزمن يقل 12 دقيقة عن الزمن الأول. جد سرعة الطائرة التقريبية أولاً.

الحل :

نفرض سرعة الطائرة أولاً = v ، نفرض السرعة بعد الزيادة = $v+10$

نفرض الزمن الذي استغرقه أولاً = $\frac{350}{v}$ ، نفرض الذي استغرقه ثانيا = $\frac{350}{v+10}$

$$\frac{350}{v}-\frac{350}{v+10}=\frac{10}{60}].v\ (v+10)\Longrightarrow\frac{350}{v}v\ (v+10)-\frac{350}{v+10}v(v+10)=\frac{v\ (v+10)}{6}$$

$$350(v+10)-350v=\frac{v^2+10v}{6}\Longrightarrow 350v+3500-350v=\frac{v^2+10v}{6}$$

$\frac{v^2+10v}{6}=3500$ طرفين في وسطين

$$v^2+10v=21000\Longrightarrow v^2+10v-21000=0$$

$(v+150)(v-140)=0$

أما $v+150=0 \Rightarrow v=-150$ تهمل

أو $v-140=0 \Rightarrow v=140\ km/h$ سرعة الطائرة أولاً

21) سباق : شاركَ نوفل في سباق ثلاثي، وتضمن السباق السباحة وركوب الدراجة والجري ، واستغرق ساعتين لإنهاء السباق كما موضح في الجدول المجاورعلى اعتبار x تعبر عن معدل سرعته في السباحة .جد معدل سرعته التقريبية في سباق السباحة.

	المسافة km	السرعة km/h	الزمن
السباحة	$d_s=1$	x	t_s
ركوب الدراجة	$d_b=20$	$5x$	t_b
الجري	$d_r=4$	$x+4$	t_r

ملاحظة : استعمل معادلة الزمن الإجمالي الذي استغرقه نوفل في السباق بدلالة سرعته في السباحة هو $T(x)=t_s+t_b+t_r$

الحل :

الزمن = $\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$

$t_s=\frac{1}{x}$, $t_r=\frac{4}{x+4}$, $t_b=\frac{20}{5x}$

$$T(x)=t_s+t_b+t_r \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{20}{5x}+\frac{4}{x+4}=2 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{4}{x}+\frac{4}{x+4}=2$$

$$\left[\frac{1}{x}+\frac{4}{x}+\frac{4}{x+4}=2\right]x(x+4)$$

$$\frac{1}{x}x(x+4)+\frac{4}{x}x(x+4)+\frac{4}{x+4}x(x+4)=2(x)(x+4)$$

$$x+4+4(x+4)+4x=2x(x+4) \Rightarrow x+4+4x+16+4x=2x^2+8x$$

$$2x^2+8x-9x-20=0 \Rightarrow 2x^2-x-20=0$$

تحل بالقانون الدستور لأنها لا تتحلل

$$a=2 \quad , \quad b=-1 \quad , \quad c=-20$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(2)(-20)}}{2(2)} \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+160}}{4}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{161}}{4} \quad , \quad \sqrt{161}\approx\sqrt{169}$$

$$x\approx\frac{1\pm\sqrt{169}}{4} \Rightarrow x\approx\frac{1\pm 13}{4}$$

السرعة تقريبا $\frac{7}{2}\ \frac{km}{h}$ $x = \frac{1+13}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$ أما

تهمل $x = \frac{1-13}{4} = \frac{-12}{4} = -3$ أو

فكر

22) تحدًّ : جد مجموعة الحل للمعادلة التالية :

واجب

$$\frac{3}{x+5} + \frac{4}{5-x} = \frac{x^2 - 15x + 14}{x^2 - 25}$$

23) أُصحِّحُ الخطأ : استعملَ نميرُ المقدارَ المميز لبيان جذور المعادلة :

$$\frac{2}{x-7} \times \frac{1}{x-1} = 1$$

فقال نميران للمعادلة جذران نسبيان حقيقيان . اكتشف خطأَ نمير وصحِّحه .

الحل :

$$\frac{2}{x-7} \times \frac{1}{x-1} = 1 \Rightarrow \frac{2}{x^2 - x - 7x + 7} = 1 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 2$$

$$x^2 - 8x + 7 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 5 = 0$$

$$a = 1 \quad , \quad b = -8 \quad , \quad c = 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4(1)(5) \Rightarrow \Delta = 64 - 20 = 44$$

∴ للمعادلة جذران حقيقيان غيرنسبيان لأن العدد الناتج ليس له جذر تربيعي

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

أكتب مجموعة الحل في مجموعة الأعداد الحقيقية :

$$\frac{1}{x+6} - \frac{5}{x-6} = 2$$

الحل :

نضرب طرفي المعادلة بالمضاعف المشترك الاصغر $(x+6)(x-6)$

$$\frac{1}{x+6}(x+6)(x-6) - \frac{5}{x-6}(x+6)(x-6) = 2(x+6)(x-6)$$

$$x - 6 - 5(x+6) = 2(x^2 - 6x + 6x - 36) \Rightarrow x - 6 - 5x - 30 = 2(x^2 - 36)$$

$$-4x - 36 = 2x^2 - 72 \Rightarrow 2x^2 + 4x + 36 - 72 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 36 = 0$$

$$2x^2 + 4x - 36 = 0 \overset{\div 2}{\Rightarrow} x^2 + 2x - 18 = 0$$

تحل بالقانون الدستور لأنه لا يمكن تحليلها .

$$a = 1 \quad , \quad b = 2 \quad , \quad c = -18$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (2)^2 - 4(1)(-18) \Rightarrow \Delta = 4 + 72 = 76$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{2(1)} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{2}$$

أما $x = \frac{-2+\sqrt{76}}{2}$

أو $x = \frac{-2-\sqrt{76}}{2}$

$$S = \left\{\frac{-2+\sqrt{76}}{2}, \frac{-2-\sqrt{76}}{2}\right\}$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖



باخرة : تقطع باخرة شحن مسافة $240km$ بين الميناء A والميناء B بسرعة معينة ولو زادت سرعتها $10\ km/h$ لتمكنت من قطع المسافة بزمن يقل ساعتين من زمن الأول جد سرعة الباخرة أولاً .

الحل : نفرض أن سرعة الباخرة الأولى $= v$ ، الزمن الأول $= \frac{240}{v}$

لذا سرعتها الثانية $v + 10$ ، الزمن الثاني $= \frac{240}{v+10}$

الزمن الأول – الزمن الثاني $= 2$

$[\frac{240}{v} - \frac{240}{v+10} = 2\ ].v(v+10)$

$[\frac{240}{v}(v)(v+10) - \frac{240}{v+10}(v)(v+10) = 2\ ].v(v+10)$

$240(v+10) - 240v = 2\,[v(v+10)]$

$240v + 2400 - 240v = 2v^2 + 20v$

$[2v^2 + 20v - 2400 = 0\ ] \div 2$

$v^2 + 10v - 1200 = 0$

$(v+40)(v-30) = 0$

أما $v + 40 = 0 \implies v = -40$ يهمل

أو $v - 30 = 0 \implies v = 30$ سرعة الباخرة

اختبار الفصل

جد مجموعة حل للمعادلتين بيانيا في R :

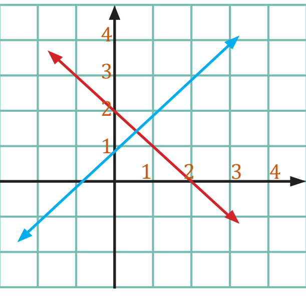
1) $y = 1 + x$
$y = 2 - x$

الحل : المستقيم $y = 1 + x$

x	$y = 1 + x$	(x, y)
0	$y = 1 + 0 = 1$	$(0, 1)$
1	$y = 1 + 1 = 2$	$(1, 2)$
2	$y = 1 + 2 = 3$	$(2, 3)$

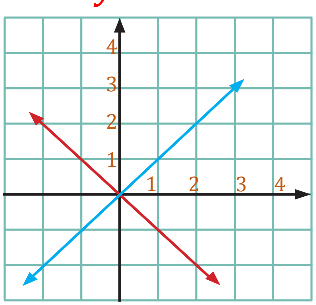
المستقيم $y = 2 - x$

x	$y = 2 - x$	(x, y)
0	$y = 2 - 0 = 2$	$(0, 2)$
1	$y = 2 - 1 = 1$	$(1, 1)$
2	$y = 2 - 2 = 0$	$(2, 0)$



مجموعة الحل $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)\right\}$

2) $y + x = 0$
$y - x = 0$



الحل : المستقيم $y + x = 0$ المستقيم $y - x = 0$

x	$y + x = 0$	(x, y)
0	$y + 0 = 0 \Rightarrow y = 0$	$(0, 0)$
1	$y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$	$(1, -1)$
2	$y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$	$(2, -2)$

x	$y - x = 0$	(x, y)
0	$y - 0 = 0 \Rightarrow y = 0$	$(0, 0)$
1	$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$	$(1, 1)$
2	$y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$	$(2, 2)$

مجموعة الحل $S = \{(0, 0)\}$

3) $y - x - 5 = 0$
$y + x - 1 = 0$ واجب

جد مجموعة حل المعادلتين في R باستعمال التعويض أو الحذف لكل مما يأتي :

4) $2x + y = 1$
$x - y = 8$

الحل : طريقة الحذف

$2x + y = 1$
$x - y = 8$ بالجمع

$3x = 9 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 3$ نعوض في (1)

$2x + y = 1 \Rightarrow 2(3) + y = 1 \Rightarrow 6 + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 6 = 5$

$S = \{(3, 5)\}$

5) $4x - 2y = -4$
$x + y = 6$ واجب

6) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$
$x + y = 2$

الحل : طريقة الحذف

$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \quad] \times (6)$ نضرب بالمضاعف المشترك الاصغر للمقامات
$x + y = 2$

$\frac{6x}{3} + \frac{6y}{2} = 6$
$x + y = 2$

$[2x + 3y = 6] \times 1$
$[x + y = 2] \times 2$

$2x + 3y = 6$
$\mp 2x \mp 2y = \mp 4$ بالطرح

$y = 2 \quad (2)$ نعوض في

$x + y = 2 \Rightarrow x + 2 = 2 \Rightarrow x = 2 - 2 \Rightarrow x = 0$

$S = \{(0, 2)\}$

حل المعادلات التالية في R باستعمال العامل المشترك الاكبر والفرق بين مربعين :

$7)\ 9x^2 - 25 = 0$

$(3x+5)(3x-5) = 0$

أما $3x + 5 = 0 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{-5}{3} \Rightarrow x = \frac{-5}{3}$

أو $3x - 5 = 0 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

$$S = \left\{\frac{-5}{3}, \frac{5}{3}\right\}$$

$8)\ 3y^2 - 12 = 0$

$3y^2 - 12 = 0 \overset{\div 3}{\Rightarrow} y^2 - 4 = 0 \Rightarrow (y+2)(y-2) = 0$

أما $y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$

أو $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$

$$S = \{2, -2\}$$

$9)\ (7-z)^2 - 1 = 0$

$(7 - z + 1)(7 - z - 1) = 0$

أما $(7 - z + 1) = 0 \Rightarrow 8 - z = 0 \Rightarrow -z = -8 \Rightarrow z = 8$

أو $(7 - z - 1) = 0 \Rightarrow 6 - z = 0 \Rightarrow -z = -6 \Rightarrow z = 6$

حل المعادلات التالية في R باستعمال قاعدة الجذر التربيعي :

$10)\ x^2 = 49$

$x^2 = 49$ بالجذر

$x = \pm\sqrt{49} \Rightarrow x = \pm 7 \qquad S = \{7, -7\}$

$11)\ 81 - y^2 = 0$

$81 - y^2 = 0 \Rightarrow -y^2 = -81 \Rightarrow y^2 = 81$ بالجذر

$y = \pm\sqrt{81} \Rightarrow y = \pm 9 \qquad S = \{9, -9\}$

$12)\ z^2 = \frac{36}{9}$

$z^2 = \frac{36}{9}$ بالجذر

$z = \pm\sqrt{\frac{36}{9}} \Rightarrow z = \pm\frac{6}{3} \qquad S = \left\{\frac{6}{3}, -\frac{6}{3}\right\}$

حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

$13)\ x^2 + 9x + 18 = 0$

الحل :

$x^2 + 9x + 18 = 0 \Rightarrow (x+6)(x+3) = 0$

أما $x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$

أو $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$$S = \{-6, -3\}$$

14) $z^2 - 2z - 48 = 0$

الحل :

$z^2 - 2z - 48 = 0 \Rightarrow (z-8)(z+6) = 0$

أما $z - 8 = 0 \Rightarrow z = 8$

أو $z + 6 = 0 \Rightarrow z = -6$

$S = \{8, -6\}$

15) $3x^2 - x - 10 = 0$ واجب

16) $7z^2 - 18z - 9 = 0$

الحل :

$7z^2 - 18z - 9 = 0 \Rightarrow (z-3)(7z+3) = 0$

أما $z - 3 = 0 \Rightarrow z = 3$

أو $7z + 3 = 0 \Rightarrow 7z = -3 \Rightarrow \frac{7z}{7} = \frac{-3}{7} \Rightarrow z = \frac{-3}{7}$

$S = \{3, \frac{-3}{7}\}$

17) ما العدد الذي مربعه ينقص من اربعة أمثاله بمقدار 3 ؟

الحل : نفرض العدد $= x$ مربع العدد $= x^2$ أربعة أمثاله $= 4x$

$4x - x^2 = 3$ نرتب المعادلة بالشكل

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) = 0$

أما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

18) حوض سباحة يزيد طوله على مثلي عرضه بمقدار $4\ m$ ومساحته $48\ \mathrm{m}^2$. ما أبعاد المسبح ؟

الحل : نفرض العرض $= x$ مثلي عرضه $= 2x$ الطول $= 2x + 4$

المساحة = الطول × العرض

$x(2x+4) = 48$

$2x^2 + 4x - 48 = 0\ ] \div 2$

$x^2 + 2x - 24 = 0$

$(x+6)(x-4) = 0$

أما $x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$ يهمل

أو $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4\ m$ العرض

الطول $= 2x + 4 = 2(4) + 4 = 12\ m$

حل المعادلات التالية في R بالمربع الكامل :

19) $x^2 - 16x + 64 = 0$ واجب

20) $\frac{1}{9} - \frac{1}{3}z + \frac{1}{4}z^2 = 0$

$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}z\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}z\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}z\right)^2 = 0$ بالجذر

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}z = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}z = -\frac{1}{3} \Rightarrow z = \frac{2}{3}$ $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

حل المعادلات التالية في R باكمال المربع :

21) $x^2 - 14x = 32$

- $x^2 - 14x = 32$
- معامل x^2 يساوي واحد
- نضيفها للطرفين $\left[\frac{1}{2} \cdot \text{معامل } x\right]^2 = \left[\frac{1}{2} \cdot (-14)\right]^2 = (-7)^2 = 49$

$x^2 - 14x + 49 = 32 + 49$

- $x^2 - 14x + 49 = 81$

$(x-7)(x-7) = 81 \Rightarrow (x-7)^2 = 81$

- $(x-7)^2 = 81 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x - 7 = \mp 9$

أما $x - 7 = 9 \Rightarrow x = 9 + 7 = 16$

أو $x - 7 = -9 \Rightarrow x = -9 + 7 = -2$ $\qquad S = \{16, -2\}$

22) $4y^2 + 20y - 11 = 0$

- $4y^2 + 20y = 11$
- نقسم المعادلة على (4) معامل x^2
- $\frac{4y^2}{4} + \frac{20y}{4} = \frac{11}{4} \Rightarrow y^2 + 5y = \frac{11}{4}$
- نضيفها للطرفين $\left[\frac{1}{2} \cdot \text{معامل } y\right]^2 = \left[\frac{1}{2} \cdot (5)\right]^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

$$y^2 + 5y + \frac{25}{4} = \frac{11}{4} + \frac{25}{4}$$

- $y^2 + 5y + \frac{25}{4} = \frac{36}{4}$

$\left(y + \frac{5}{2}\right)\left(y + \frac{5}{2}\right) = \frac{36}{4} \Rightarrow \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{36}{4}$

- $\left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{36}{4} \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} y + \frac{5}{2} = \mp \frac{6}{2}$

أما $y + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} \Rightarrow y = \frac{6}{2} - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$

أما $y + \frac{5}{2} = -\frac{6}{2} \Rightarrow y = -\frac{6}{2} - \frac{5}{2} = \frac{-11}{2}$ $\qquad S = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}\right\}$

23) $z^2 - \frac{2}{3}z = 1$ واجب

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام في R :

$x^2 - 3x - 7 = 0$ (24)

الحل :

$$a = 1 \quad , \quad b = -3 \quad , \quad c = -7$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-7)}}{2(1)} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 28}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$$



أما $x=\frac{3+\sqrt{37}}{2}$

أو $x=\frac{3-\sqrt{37}}{2}$ $\qquad S=\left\{\frac{3+\sqrt{37}}{2},\frac{3-\sqrt{37}}{2}\right\}$

(25) $3y^2-12y=-3$ واجب

(26) $5z^2+6z=9$

الحل : نرتب المعادلة $5z^2+6z-9=0$

$$a=5\quad,\quad b=6\quad,\quad c=-9$$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow z=\frac{-6\pm\sqrt{(-6)^2-4(5)(-9)}}{2(5)}\Rightarrow z=\frac{-6\pm\sqrt{36+180}}{10}$$

$$z=\frac{-6\pm\sqrt{216}}{10}=\frac{-6\pm 6\sqrt{6}}{10}$$

أما $z=\frac{-6+6\sqrt{6}}{10}$

أو $z=\frac{-6-6\sqrt{6}}{10}$ $\qquad S=\left\{\frac{-6+6\sqrt{6}}{10},\frac{-6-6\sqrt{6}}{10}\right\}$

حدد جذور المعادلة أولاً ثم جد مجموعة الحل في R اذا كان ممكنا :

(27) $2x^2+8x+8=0$

الحل :

$$a=2\quad,\quad b=8\quad,\quad c=8$$

$$\Delta=b^2-4ac\Rightarrow\Delta=(8)^2-4(2)(8)=64-64=0$$

$\therefore$ للمعادلة جذران متساويين

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow x=\frac{-8\pm\sqrt{0}}{2(2)}\Rightarrow x=\frac{-8}{4}=-2\qquad S=\{-2\}$$

(28) $y^2-6y-9=0$ واجب

(29) $4z^2-3z+7=0$ واجب

(30) ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2-(k+6)x+9=0$ متساويين ؟وتحقق من الاجابة.

الحل : يكون جذرا المعادلة متساويين عندما قيمة المميز $\Delta=0$

$$a=1\quad,\quad b=-(k+6)\quad,\quad c=9$$

$$\Delta=b^2-4ac\Rightarrow\Delta=[-(k+6)]^2-4(1)(9)$$

$$\Delta=0\Rightarrow(k+6)^2-36=0\Rightarrow(k+6)^2=36\overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow}k+6=\pm\sqrt{36}$$

$$k+6=\pm 6$$

أما $k+6=6\Rightarrow k=6-6=0$

أو $k+6=-6\Rightarrow k=-6-6=-12$

التحقق : نعوض قيمة $k=0$ بالمعادلة الاصلية

$$x^2-(0+6)x+9=0\Rightarrow x^2-6x+9=0\Rightarrow x^2-6x+9=0$$

$$(x-3)(x-3)=0\Rightarrow(x-3)^2=0\overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow}x-3=0\Rightarrow x=3$$

نعوض قيمة $k=-12$ بالمعادلة الاصلية (واجب)

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية في R وتحقق من صحة الحل :

31) $\frac{6x}{5} = \frac{5}{6x}$

الحل : طرفين في وسطين

$6x\,(6x) = 5 \times 5$

$36x^2 = 25 \implies 36x^2 - 25 = 0 \implies (6x+5)(6x-5) = 0$

أما $6x + 5 = 0 \implies 6x = -5 \implies \frac{6x}{6} = \frac{-5}{6} \implies x = \frac{-5}{6}$

أما $6x - 5 = 0 \implies 6x = 5 \implies \frac{6x}{6} = \frac{5}{6} \implies x = \frac{5}{6}$ $\qquad S = \left\{\frac{-5}{6}, \frac{5}{6}\right\}$

التحقق : نعوض عن $x = \frac{-5}{6}$

الطرف الايسر $\frac{6x}{5} \implies \frac{6\left(\frac{-5}{6}\right)}{5} \implies \frac{-5}{5} = -1$

الطرف الايمن $\frac{5}{6x} \implies \frac{5}{6\left(-\frac{5}{6}\right)} \implies \frac{5}{-5} = -1$

نعوض عن $x = \frac{5}{6}$ (واجب)

32) $\frac{1}{6y^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{y}$

الحل : نضرب بالمضاعف المشترك الاصغر للمقامات وهو $(6y^2)$

$$\left[\frac{1}{6y^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{y}\right][6y^2] \implies \frac{6y^2}{6y^2} + \frac{6y^2}{2} = \frac{6y^2}{y} \implies 1 + 3y^2 = 6y \implies 3y^2 - 6y + 1 = 0$$

$a = 3 \quad , \quad b = -6 \quad , \quad c = 1$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \implies y = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} \implies y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 12}}{6}$$

$$y = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{6}$$

أما $y = \frac{6+\sqrt{24}}{6}$

أو $y = \frac{6-\sqrt{24}}{6}$ $\qquad S = \left\{\frac{6+\sqrt{24}}{6}, \frac{6-\sqrt{24}}{6}\right\}$

33) $\frac{z+4}{z^2} = \frac{1}{2}$ واجب

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية في R :

34) $\frac{4}{x-5} - \frac{3}{x-2} = 1$

الحل : نضرب طرفي المعادلة بالمضاعف المشترك الأصغر $(x-5)(x-2)$

$$\frac{4}{x-5}(x-5)(x-2) - \frac{3}{x-2}(x-5)(x-2) = (x-5)(x-2)$$

$4(x-2) - 3(x-5) = x^2 - 2x - 5x + 10$

$4x - 8 - 3x + 15 = x^2 - 7x + 10 \implies x + 7 = x^2 - 7x + 10$

$x^2 - 7x + 10 - x - 7 = 0 \implies x^2 - 8x + 3 = 0$ تحل بالدستور

$35)\ \frac{2y}{y+2}+\frac{y}{2-y}=\frac{7}{y^2-4}$

الحل :

$$\frac{2y}{y+2}+\frac{y}{-y+2}=\frac{7}{(y+2)(y-2)}$$

$$\frac{2y}{y+2}+\frac{y}{-(y-2)}=\frac{7}{(y+2)(y-2)} \Longrightarrow \frac{2y}{y+2}-\frac{y}{y-2}=\frac{7}{(y+2)(y-2)}$$

نضرب طرفي المعادلة بالمضاعف المشترك الأصغر $(y+2)(y-2)$

$$\frac{2y}{y+2}(y+2)(y-2)-\frac{y}{y-2}(y+2)(y-2)=\frac{7}{(y+2)(y-2)}(y+2)(y-2)$$

$$2y(y-2)-y(y+2)=7 \Longrightarrow 2y^2-4y-y^2-2y=7$$

$$y^2-6y=7 \Longrightarrow y^2-6y-7=0 \Longrightarrow (y-7)(y+1)=0$$

أما $y-7=0 \Longrightarrow y=7$

أما $y+1=0 \Longrightarrow y=-1$

$$S=\{7,-1\}$$



تم بحمد الله